UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

Gabriel Luiz Borghetti
Marcele Cristine Assis
Rafael Tramontini Tech
Thays Perin

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA: ESTÁGIO SUPERVISIONADO II PROMAT

CASCAVEL
2022

Gabriel Luiz Borghetti
Marcele Cristine Assis
Thays Perin
Rafael Tramontini Tech

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA: ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.

Orientadora: Profª. Drª. Andreia Büttner Ciani.

CASCAVEL
2022

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A disciplina Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado II do curso de licenciatura em Matemática - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) é composta por 68 horas de aulas teóricas e 204 horas de prática. As 204 horas de prática foram divididas em dois momentos: no primeiro semestre foram dedicadas 102 horas às atividades na escola, dos quais estavam inclusos observações, auxílios e regência; no segundo momento estivemos durante as 102 horas restantes no envolvidos no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT).

Ao considerar a pandemia da COVID-19, os colégios da rede estadual de ensino não sofreram grandes impactos quanto ao calendário escolar, diferentemente do que na Unioeste. O calendário acadêmico da Unioeste foi bastante prejudicado e o ano letivo de 2021 iniciou apenas em novembro de 2021 e se estenderá até agosto de 2022. Como o projeto PROMAT normalmente é realizado com alunos do ensino médio dos colégios estaduais, foi necessário adequar a quantidade e organização das aulas de modo que fosse possível acabar antes das férias dos colégios estaduais.

Ao todo foram realizadas 10 aulas, dos quais três foram aulas assíncronas e sete foram presenciais na Unioeste. As aulas assíncronas foram gravadas pelos alunos e disponibilizadas no *YouTube* e duravam de 30 a 40 minutos. As aulas presenciais eram realizadas nos sábados de manhã, iniciavam as 08h00min e tinham fim as 11h40min, com pausa para intervalo das 09h40min às 10h00min. As aulas iniciaram em 21 de maio de 2022 e tiveram fim em nove de julho do mesmo ano. A organização das aulas e os conteúdos trabalhados podem ser visualizados na tabela 1.

Tabela 1: Cronograma das aulas e conteúdos.

Datas	Encontros	Conteúdo	Conteúdo detalhado
21/05	1	Trigonometria	Seno, cosseno, tangente no triângulo retângulo.
28/05	2		Circunferência; tipos de funções, domínio e imagem, período e função (seno, cosseno, tangente).
04/06	3		Relações trigonométricas.
Assíncrono	4	Geometria Analítica	Coordenadas cartesianas no plano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, pontos colineares.
11/06	5		Equação geral e reduzida da reta, posições relativas entre duas retas no plano.

25/06	6		Equação geral e reduzida da circunferência, posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta.
Assíncrono	7		Princípio fundamental da contagem.
02/07	8		Permutação, arranjo e combinação.
09/07	9		Probabilidade.
Assíncrono	10		Interpretação de gráficos, tabelas e esquemas.

Fonte: Acervo dos autores.

Este relatório foi dividido em cinco etapas: a primeira etapa aborda a introdução; a segunda traz uma breve descrição do PROMAT, juntamente com a opção metodológica escolhida pelos acadêmicos; a terceira parte contém a fundamentação teórica escolhida, a qual foi desenvolvida em formato de artigo científico e que tenha relação com a opção metodológica escolhida; a quarta parte possuí os planos e os relatórios das aulas que, estão organizados em ordem cronológica; e por fim, a quinta parte traz as considerações finais dos acadêmicos quanto as aulas e as experiências vividas no PROMAT.

2. PROMAT

O Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT) é um Projeto do Colegiado do Curso de Matemática que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino. As atividades realizadas normalmente são direcionadas aos estudantes que tem interesse em ingressar futuramente em cursos superiores.

No decorrer das aulas do projeto são ofertadas aulas de matemática básica. Os conteúdos a serem trabalhados são previamente escolhidos analisando o histórico dos conteúdos que foram exigidos nos ultimos anos dos vestibulates da Unioeste, no Examen Nacional do Ensino Médio – ENEM e, de outros processos seletivos. Possuí formato de "Curso Preparatório de Matemática" e objetiva a apropriação de determinados conteúdos, conceitos e estruturas matemáticas.

Para as aulas fico definido que trabalharíamos por meio da metodologia de resolução de problemas e que, para estes, faríamos uma busca nas provas de anos anteriores dos vestibulares da Unioeste, ENEM ou outro que tenha relevância para os alunos.

Após a escolha da metodologia teórica e do banco de questões a serem utilizados, as aulas foram planejadas e encaminhadas a professora orientadora Dr. Andreia Büttner Ciani para conferência e, somente apóes deste, as aulas foram aplicadas.

3 OPÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Trabalhar com a resolução de problemas é estar envolvido em tarefas e atividades cujo método de resolução não é conhecido de forma imediata. Para conseguir encontrar a resolução das atividades, os estudantes devem aplicar os seus conhecimentos prévios em matemática. Para Romanatto (2012), solucionar um problema não é apenas buscar aprender a matemática, mas sim, fazê-la. É papel do professor proporcionar aos estudantes a oportunidade de formular, tentar, conjecturar, demonstrar e resolver problemas desafiadores. Romanatto (2012, p. 303) também afirma que "solucionar problemas não significa apenas resolvê-los, mas aplicar sobre eles uma reflexão que estimule o seu modo de pensar, sua curiosidade e seus conhecimentos". Para Polya (1978), ter um problema é buscar conscientemente por alguma ação para atingir um objetivo que esteja claramente definido, pelo qual não é possível atingir de imediato.

Polya (1978) ainda menciona que

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve por seus próprios meios,experimentará a tensão e vivenciará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (POLYA, 1978, p. 3).

De acordo com Gravina e Santarosa (1999), é necessário que o aluno atue em todo o processo de "fazer matemática". "Toda disciplina tem um corpo de conhecimentos e uma lógica peculiar (sua especificidade). No caso da Matemática, na perspectiva educacional, essa especificidade é a resolução de problemas" (ROMANATTO, 2012, p. 303). Essa perspectiva que o autor menciona, está de acordo com o que postulava Descartes: "(...) nunca nos tornaremos matemáticos, por exemplo, embora saibamos de cor todas as demonstrações feitas pelos outros, se com o espírito não formos capazes de resolver todo e qualquer problema" (DESCARTES, 1999, p. 6)

É de grande valia ressaltar, que a criança é inserida em um contexto, que possui costumes e ideologias pré-definidas. Desse modo, Oliveira (1997, p. 36) afirma que "é o grupo cultural onde o indivíduo se desenvolve que lhe fornece formas de perceber e organizar o real, as quais vão constituir os instrumentos psicológicos que fazem a mediação entre o indivíduo e o mundo". Portanto, ao comparar a citação de Oliveira (1997) com a educação nas escolas, entende-se que o professor atua como um mediador do conhecimento. Desse modo, Libâneo (1994) defende que:

> O trabalho docente é atividade que dá unidade ao binômio ensino-aprendizagem, pelo processo de transmissão-assimilação ativa de conhecimentos, realizando a tarefa de mediação na relação cognitiva entre o aluno e as matérias de estudo (LIBÂNEO, 1994, p. 88).

O objetivo do professor como mediador, é ser a ligação entre o estudante e o conhecimento. Desse modo, deve estimular o desenvolvimento das atividades cognitivas dos alunos, instigando-os a pensar e analisar as situações criticamente, colocando-se como sujeitos da sua própria história (BULGRAEN, 2010).

É indubitável que o professor, como educador e mediador do conhecimento deve renovar e adaptar a sua forma pedagógica de modo que, atenda às necessidades dos alunos e integre nas suas realidades. Nesse contexto a escolha da metodologia resolução de problemas se deu pelo fato de que o PROMAT é um curso de caráter preparatório para o ENEM e vestibulares, dessa forma se acredita que ao trabalhar com esta metodologia vai se aproximar dos objetivos dos alunos, o de conseguir interpretar e resolver as questões dos processos seletivos pelos quais forem participar.

Referências:

BULGRAEN, V. **O papel do professor e sua mediação nos processos de elaboração do conhecimento**. Revista Conteúdo, Capivari, v.1, n.4, 2010.

DESCARTES, R. **Regras de orientação de espírito**. Tradução: João Gama. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Informática na Educação**: teoria e prática. Porto Alegre, v. 2, n. 1, p. 73-88, 1999.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 1994.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento – um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1997.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012.

4 REGÊNCIA

4.1 Plano de aula 1 – 21/05.

Conteúdo: Trigonometria no triângulo retângulo.

Objetivo geral: Introduzir a ideia de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e suas propriedades.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com a trigonometria no triângulo retângulo, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer um triângulo retângulo, identificando a hipotenusa, os catetos, ângulo reto, ângulos agudos;
- Compreender os conceitos de seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo;
- Desenvolver algumas relações básicas;
- Deduzir as relações métricas no triângulo retângulo a partir de semelhança de triângulos;
- Entender a correlação entre os valores do seno, cosseno e tangente com as medidas do triângulo retângulo;
- Compreender, por meio das relações métricas, a demonstração do teorema de Pitágoras;
- Deduzir as medidas dos ângulos notáveis no triângulo retângulo
- Aplicar o teorema de Pitágoras;
- Compreender as relações no triângulo retângulo.

Tempo de execução:

Um encontro de 3 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Giz, lousa, projetor, lâminas e folha impressa com exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Antes de começar a aula, os alunos serão divididos em pequenos grupos de 5 a 6 pessoas, dependendo da quantidade de alunos na aula.

No primeiro momento da aula, iremos nos apresentar e ressaltaremos aos alunos como serão nossas aulas, além disso, informaremos que em todas as aulas eles serão divididos em grupos e que as aulas ocorrem do mesmo modo que vinha acontecendo. Após essa fala introdutória, os alunos serão convidados a participar de uma dinâmica para que possam se apresentar e se conhecer:

Com a intenção de entrosar o grupo e considerando que os alunos estarão em grupos será destinado cinco minutos iniciais para que eles conversem uns com os outros para se conhecerem melhor e então será pedido para que cada colega apresente o colega ao lado. Caso o aluno não saiba falar sobre o aluno que está sendo apresentado poderá falar mais sobre si.

Para a apresentação será pedido o seu nome, idade, cidade, qual curso pretende cursar, se gosta de matemática, o que gosta de fazer nas horas de lazer e para falar uma qualidade com a inicial do seu nome.

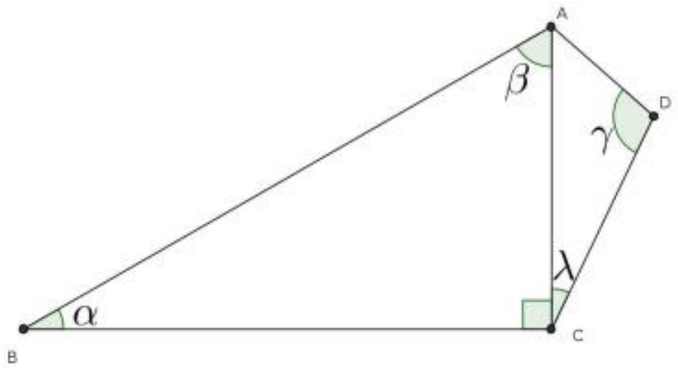
Após, será escrito no centro da lousa "Por que você se inscreveu no Promat?" Espera-se que as respostas sejam referentes a "passar no vestibular", "entrar na faculdade", "tirar uma boa nota no Enem", "aprender matemática", "tirar dúvidas".

Conforme os alunos forem respondendo à pergunta da lousa, suas respostas serão escritas para mostrar que esses objetivos são comuns e os unem. Em seguida, os alunos serão indagados sobre o que tem que ser feito para que o Promat seja efetivo. As respostas serão anotadas com o que eles consideram como obrigações deles e nossas e assim será estabelecido as regras para as aulas.

Após o final da dinâmica, dar-se-á início ao conteúdo planejado para a aula. Inicialmente será apresentado a questão 1 será projetada na lousa:

1 - (Unioeste - 2014) Na figura abaixo ABC é um triângulo retângulo, com ângulo reto em C e BC mede a centímetros. Sabe-se que $\boldsymbol{\alpha = \frac{\beta}{2}}$, $\boldsymbol{\lambda = \alpha + 15}$ e $\boldsymbol{\gamma = \lambda + \beta}$. Assim, é CORRETO afirmar que a medida, em centímetros, de AD é:

Figura 1: Polígono ABCD



Fonte: UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [S. l.], 2014.

a) $\frac{2\sqrt{3}a}{3(\sqrt{3}+1)}$

b) $\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{3}+1}$

c) $\frac{2\sqrt{3}a}{3(1-\sqrt{3})}$

d) $\frac{2\sqrt{3}a}{3(\sqrt{3-1})}$

e) $\frac{\sqrt{3}a}{3(\sqrt{3+1})}$

Será então solicitado que os alunos comentem sobre as possíveis estratégias de resolução do exercício e quais conceitos são, ou devem ser utilizados para resolver o exercício. Objetiva-se que os alunos abordem os conceitos de triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e relações trigonométricas.

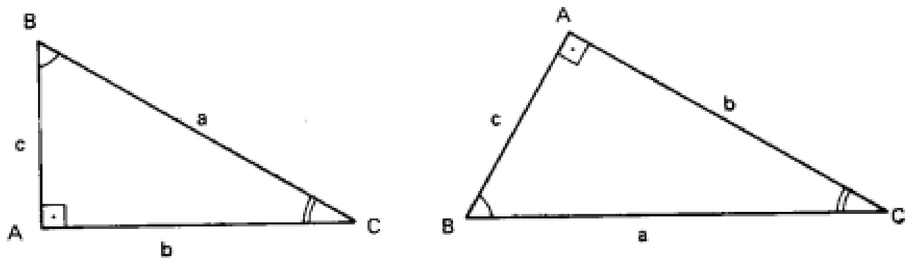
Ressaltaremos que antes de resolver a questão, é necessário verificar alguns conceitos. Para tal, será explicado, passo a passo, e escrito na lousa as seguintes informações.

Triângulo retângulo

Um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto, ou seja, mede 90º.

Por exemplo,

Figura 2: Triângulos retângulos



Fonte: Iézzi (2004)

Vamos utilizar a notação seguinte para os elementos de um triângulo ABC:

Lados: AB, BC, AC;

Ângulos internos: BÂC, ABC, ACB;

Medidas dos lados: a = medida de BC;

b = medida de AC;

c = medida de AB;

Medidas dos lados: Â = medida de BÂC;

$\hat{B}$ = medida de A$\hat{B}$C;

$\hat{C}$ = medida de A$\hat{C}$B;

Propriedades:

Seja um triângulo retângulo ABC e conduzirmos AD perpendicular à BC, com D em BC, obtemos:

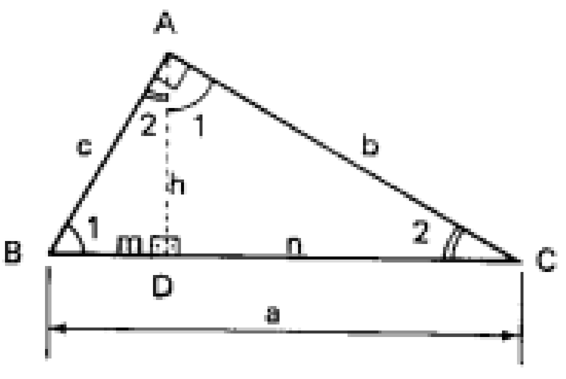
AD = altura relativa à hipotenusa (medida h)

BD = projeção do cateto AB sobre a hipotenusa (medida m)

CD = projeção do cateto AC sobre a hipotenusa (medida n)

$\hat{B} = \hat{1}$ e $\hat{C} = \hat{2}$ pois AB perpendicular AC e BC perpendicular a AD

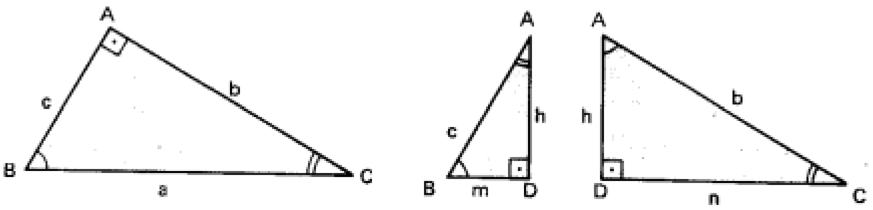
Figura 3: Triângulo retângulo com projeções.



Fonte: Iézzi (2004)

Podemos observar três triângulos ABC, DBA e DAC, que são semelhantes por apresentarem ângulos dois a dois congruentes.

Figura 4: Triângulos retângulos divididos.



Fonte: Iézzi (2004)

Assim, temos as seguintes propriedades:

$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = am$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = an$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow bc = ah$

$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = mn$

Em seguida, será apresentado o seguinte conceito na lousa:

Teorema de Pitágoras

Somando membro a membro as duas primeiras relações, temos:

$c^2 = am$

$b^2 = an$

$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = aa = a^2$

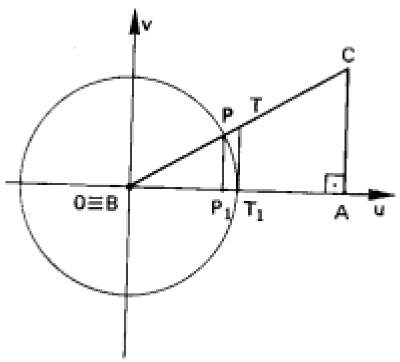
Ou seja, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Em seguida, a questão será exposta novamente e será comentado com os alunos que para responder essa questão é necessário utilizar os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. Será solicitado que os alunos tentem resolvê-la.

Acredita-se que os alunos terão dificuldade na resolução deste exercício, assim, antes da resolução será definido os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo da seguinte forma.

Vamos provar as três propriedades que relacionam as medidas dos lados e as dos ângulos de um triângulo retângulo ABC. Para isso vamos considerar uma circunferência de raio unitário e centro no vértice B e vamos fixar um sistema u0v de referência como mostra a Figura x.

Figura 5: Circunferência com triângulo retângulo projetado.



Fonte: Iézzi (2004)

1. $\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{senB}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow senB = \frac{b}{a}$$

Isto é, o seno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa.

2. $\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{\overline{BP_1}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{cosB}{1} = \frac{c}{a} \Rightarrow cosB = \frac{c}{a}$$

Isto é, a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente ao ângulo

3. $\Delta BTT_1 \sim \Delta BCA$, então

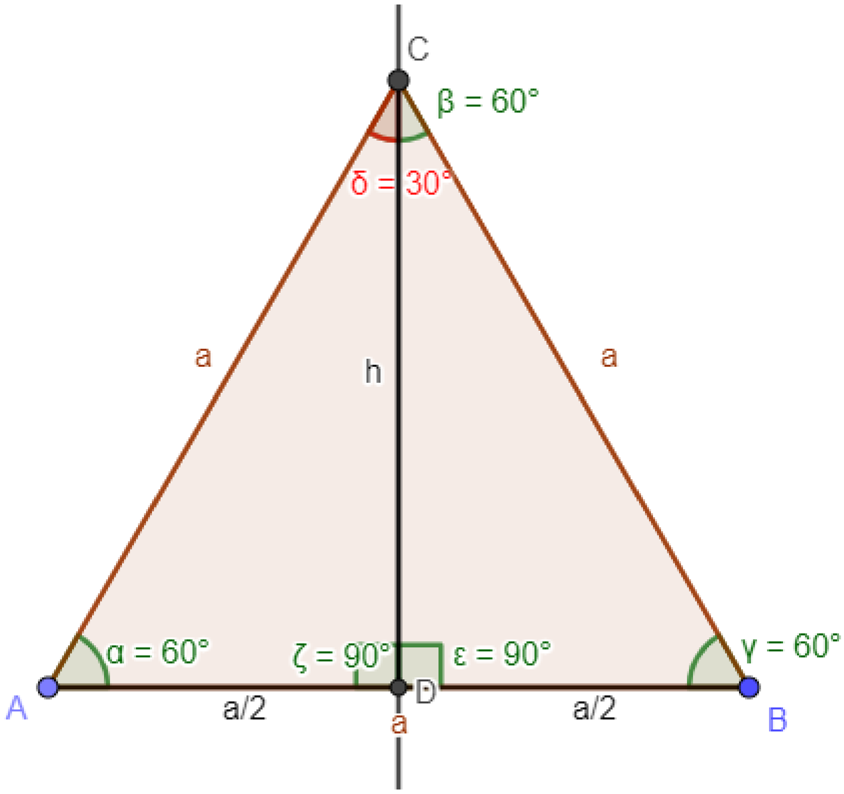
$$\frac{\overline{T_1T}}{\overline{OT_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{tgB}{1} = \frac{b}{c} \Rightarrow tgB = \frac{b}{c}$$

Isto é, a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente ao ângulo

Em seguida serão deduzidos os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis da seguinte forma.

Tomando um retângulo equilátero será tomado o ponto médio de um dos lados e traçada uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio e o vértice oposto a esse lado, como representado na Figura x.

Figura 6: Triângulo equilátero.



Fonte: Acervo dos autores

Assim, serão construídos dois triângulos retângulos com ângulos de 60° e 30°, em seguida, utilizando as relações vistas anteriormente, será encontrado o seno, cosseno e tangente do ângulo de 60°, em relação à medida de seus lados, de forma que:

$sen(60°) = \frac{h}{a}$, temos que

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow 4a^2 = 4h^2 + a^2 \Rightarrow 3a^2 = 4h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

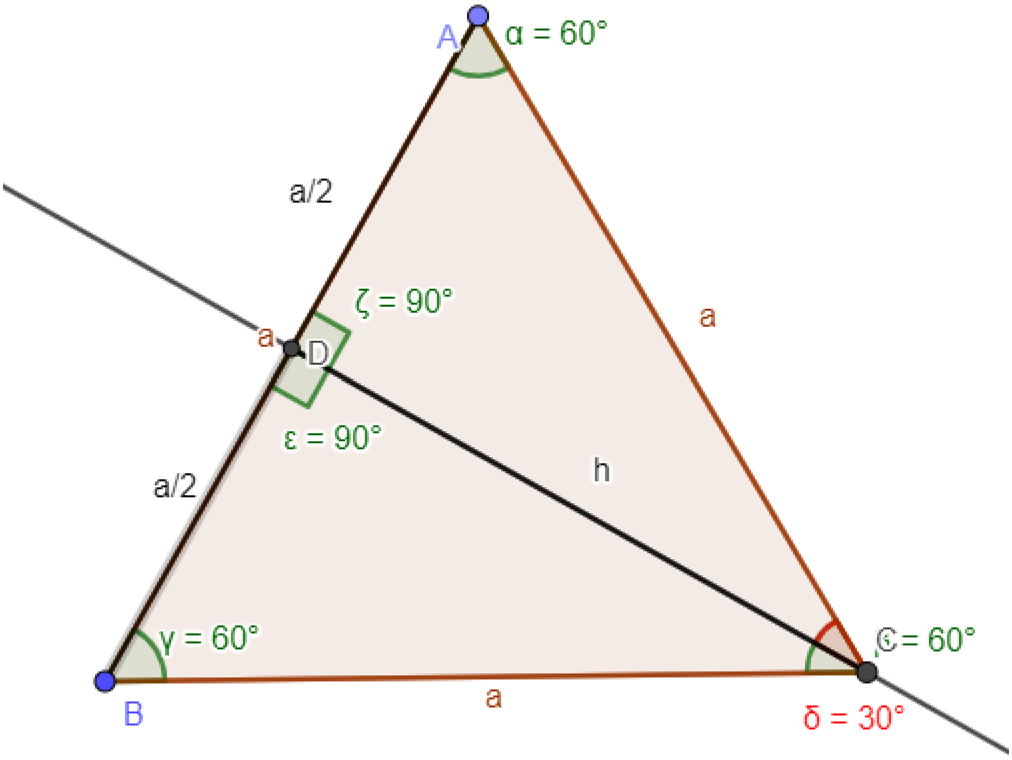
$$sen(60°) = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(60°) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg(60°) = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

De forma análoga, será tomado o ângulo com 30° de forma que:

Figura 7: Triângulo equilátero com divisão de ângulos.



Fonte: Acervo dos autores

$$sen(30°) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$cos(30°) = \frac{h}{a}$, temos que

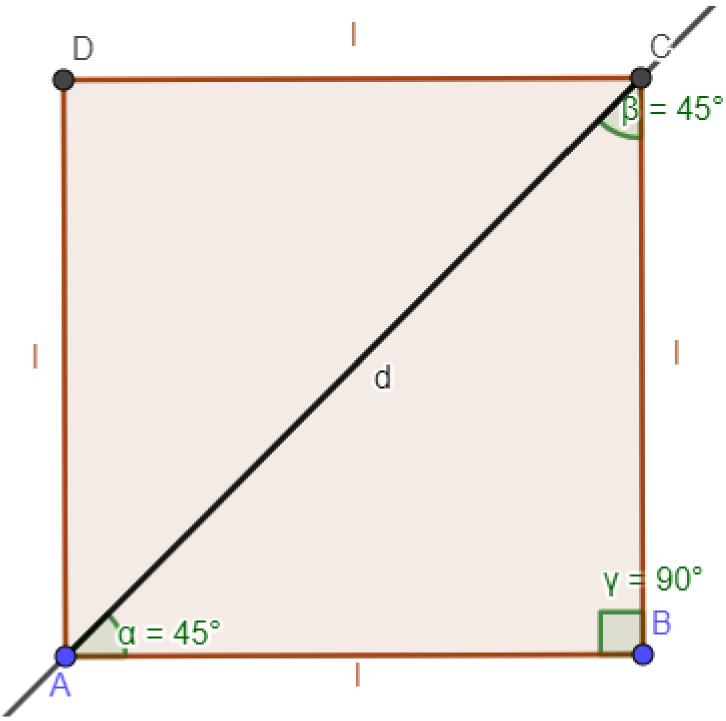
$$a^2 = h^2 + \frac{b^2}{4} \Rightarrow 4a^2 = 4h^2 + b^2 \Rightarrow 3a^2 = 4h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(30°) = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg(30°) = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} . \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por fim, será tomado um triângulo retângulo formado da divisão de um quadrado, de forma que:

Figura 8: Quadrado com divisão de ângulos



Fonte: Acervo dos autores

$sen(45°) = \frac{l}{d}$, temos que

$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

$$sen(45°) = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos(45°) = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(45°) = \frac{l}{l} = 1$$

No terceiro momento, será retomado a questão norteadora do conteúdo, e enfim, resolvida.

Resolução:

Temos que β = 2α, logo, como um triângulo tem 180°, temos que:

$$\beta + \alpha + 90 = 180 \Rightarrow 2\alpha + \alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 30°$$

Consequentemente, temos que β = 60°, λ = 45° e γ = 105°

Além disso, temos que o outro cateto é:

tg(30°) = $\frac{c}{a} \Rightarrow c = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ **e que a hipotenusa é:**

$$(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 + a^2 = H \Rightarrow H = \frac{4a^2}{3}$$

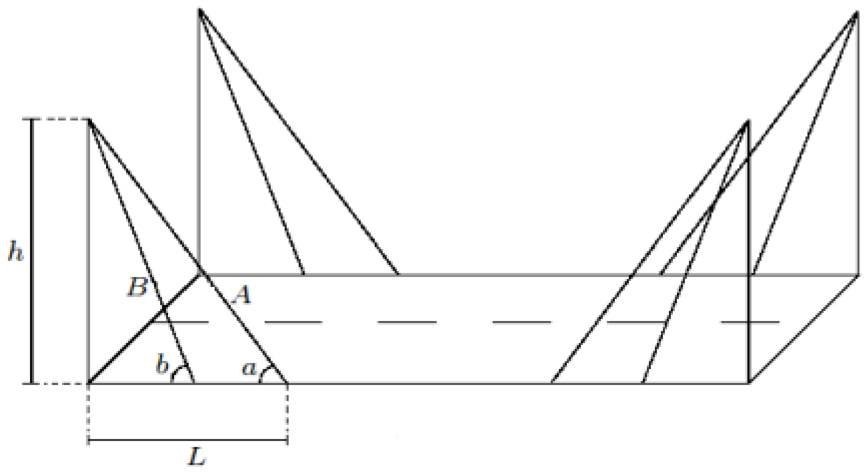
Por fim, temos que:

$$\frac{\overline{AD}}{Sen(\lambda)} = \frac{c}{sen(\gamma)} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{Sen(45°)} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{sen(90°+15°)} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})3} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{2a\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{3})}$$

E, consequentemente, a alternativa correta é a letra a.

Por fim, os alunos serão convidados a resolver as questões que seguem.

1. **(Unioeste - 2012) Uma construtora foi contratada para construir uma ponte. No projeto está previsto a construção, nas extremidades da ponte, de quatro colunas de concreto, de altura h, que servirão para fixar cabos de aço que sustentarão a ponte. Em cada coluna serão fixados, na extremidade superior, dois cabos de comprimento A e B. A outra extremidade do cabo de comprimento A será fixada na ponte, a uma distância de L da base da coluna, formando o ângulo a com a ponte. A outra extremidade do cabo de comprimento B também será fixada na ponte formando um ângulo b com a ponte, conforme a figura. A ponte será supostamente plana e as colunas de concreto serão construídas de modo a formar um ângulo de 90° com a ponte. É correto afirmar que a quantidade total de cabo a ser utilizado na construção é:**



a) $4(\frac{h}{sen(b)} + \frac{L}{sen(a)})$

b) $4(\frac{h}{tg(b)} + \frac{L}{cos(a)})$

c) $4(\frac{h}{sen(b)} + \frac{L}{cos(a)})$

d) $4(\frac{h}{sen(b)} + \frac{L}{tg(a)})$

e) $4(\frac{h}{tg(b)} + \frac{L}{tg(a)})$

Resolução:

Queremos encontrar as medidas de B e A, pois são as cordas e ao fim precisa-se multiplicar por 4 pois são quatro lados.

Analisando primeiramente o triângulo com a hipotenusa medindo B, sabe-se que o cateto oposto mede h, logo pode-se usar sen(b):

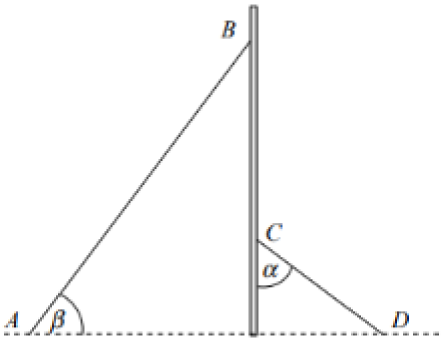
$$\boldsymbol{sen(b) = \frac{h}{B} \rightarrow\ B = \frac{h}{sen(b)}}$$

Analisando agora o triângulo com a hipotenusa medindo A, sabe-se que o cateto adjacente mede L, logo pode-se usar cos(a):

$$\boldsymbol{cos(a) = \frac{L}{a} \rightarrow\ B = \frac{L}{cos(a)}}$$

Logo, a alternativa correta é a letra c.

2. (UNIOESTE - 2011) Um tubo é fixado verticalmente em uma superfície plana e, para sustentá-lo, alguns fios são presos a ele e esticados até o chão. Dois destes fios estão em lados opostos, conforme ilustra a figura a seguir. Um deles está fixado ao tubo no ponto B e o outro está fixado no ponto C.



O fio CD mede 5 metros, está fixado no chão a 4 metros do tubo (ponto D) e o ângulo que faz com o tubo tem medida α. O fio AB está no chão a 7 metros do tubo (ponto A) e faz com o chão um ângulo de medida β. Sabendo-se que α = β pode-se concluir que o fio AB mede:

a) 35/4 m.

b) 35/3 m.

c) 28/3 m.

d) 28/5 m.

Resolução:

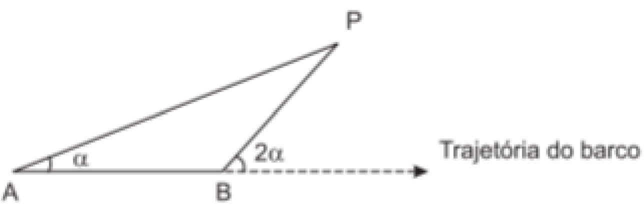
Sabendo que $\alpha = \boldsymbol{\beta}$ e que os dois triângulos são retângulos, temos que são semelhantes. Chamando de E o ponto em que o tubo encosta no chão, podemos calcular o

valor de CE utilizando pitágoras (é um triângulo 3, 4 e 5), logo CE mede 3 metros.

Utilizando a semelhança:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{7} = \frac{5}{3} \rightarrow \overline{AB} = \frac{35}{3}$$

3. **(ENEM - 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:**



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α = 30º e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2.000 m. Com base nesses dados e mantendo a trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será.

a) **1.000 m.**
b) **1.000 $\sqrt{3}$ m.**
c) **2.000 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m**
d) **2.000 m**
e) **2.000 $\sqrt{3}$ m**

Resolução:

Se $\alpha = 30$º então $2\alpha = 60$º e logo seu suplementar ABC é 120º. Como a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º então APB é 30º, logo é um triângulo isósceles e PB mede também 2000m.

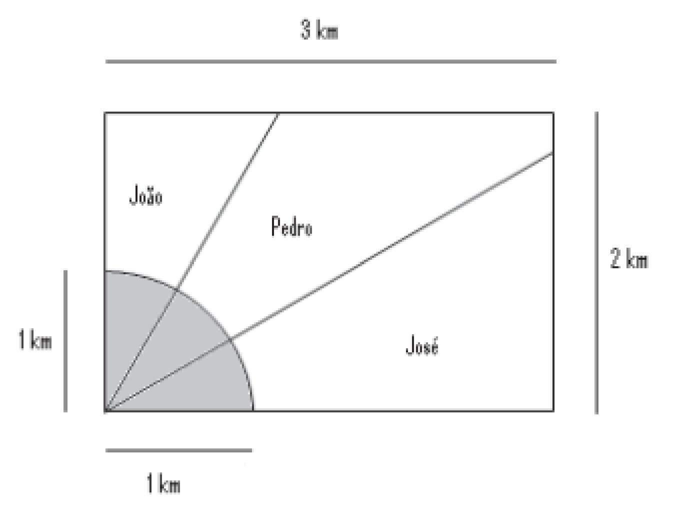
$\boldsymbol{sen\ 60}$º$= \frac{CO}{2000}$ logo $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CO}{2000}$

temos que a menor distância é $1000\sqrt{3}$

4. **(ENEM - 2009) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um**

quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a (Considere $\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 0,58)



a) **50%**
b) **43%**
c) **37%**
d) **33%**
e) **19%**

Resolução:

No triângulo retângulo ADE, representante da parte do terreno que coube a João, temos

tg 30º = $\frac{AE}{AD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58 \rightarrow AE = 1,16\ km$

A área desse triângulo, em km^2, é: $\frac{1,16\ .2}{2} = 1,16$

O terreno que coube a João corresponde a $\frac{1,16\ km^2}{2\ .3\ .km^2} \cong 0,193 = 19,3\%$ **do terreno total, ou seja, aproximadamente, 19% do terreno inicial.**

Letra E

Durante o tempo destinado para a resolução dos exercícios, nós ficaremos à disposição para retirar eventuais dúvidas dos alunos, além de atendê-los em sua própria mesa.

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos. Além disso, durante a resolução dos exercícios os alunos serão acompanhados e avaliados com base na compreensão do conteúdo e nas interações realizadas.

Referências:

DANTE. Roberto. Tudo é Matemática. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, C.; IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar - Trigonometria** - Vol. 1 - 8ª Ed. Editora: Atual. 2004.

UNIOESTE - **Prova da Segunda Etapa** (Segundo dia). [S. l.], 2012. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2012/PROVA_DE_INGLES.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

UNIOESTE - **Prova da Segunda Etapa** (Segundo dia). [S. l.], 2011. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2011/Grupo_1.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

UNIOESTE - **Prova da Segunda Etapa** (Segundo dia). [S. l.], 2014. Disponível em:https://www.unioeste.br/cogeps/arquivos/vestibular/2014geral/030.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2011 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/dia2_caderno5_amarelo.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2009 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em:

https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2009/dia2_caderno5_amarelo.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

4.1.1 Relatório de aula 1.

4.2 Plano de aula 2 – 28/05.

Conteúdo: Funções Trigonométricas

Objetivo geral: Trabalhar com circunferências, tipos de funções, domínio e imagem, período e função.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com funções trigonométricas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender e calcular as razões trigonométricas na circunferência;
- Conhecer, demonstrar e aplicar a relações fundamentais da Trigonometria;
- Resolver equações e inequações trigonométricas;
- Construir os gráficos das funções trigonométricas determinando sua imagem e período, bem como aplicá-las na modelação de fenômenos periódicos.

Tempo de execução:

Um encontro de 3 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

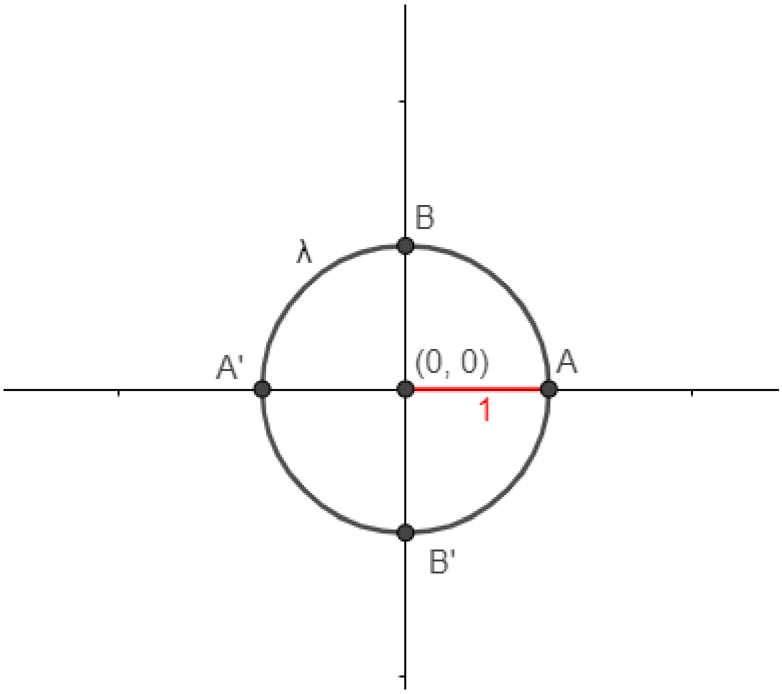
Giz, lousa, projetor, lâminas e folha impressa com exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente retomaremos os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, ensinados na aula anterior e, após isso, apresentaremos, formalmente, o conceito de círculo trigonométrico a partir da definição seguinte.

Tomando, sobre um plano, um sistema cartesiano ortogonal x0y e uma circunferência λ de centro 0, raio r = 1 e, consequentemente, comprimento igual a 2π como ilustrado na Figura x.

Figura 9: Círculo trigonométrico.



Fonte: Acervo dos autores

É definido uma aplicação de IR sobre λ, isto é, associa-se a cada número real x um único ponto P da circunferência λ de forma que:

1°)Se x = 0, então P coincide com A;

2°)Se x > 0 então realiza-se, a partir de A, um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marca-se P como ponto final do percurso;

3°)Se x < 0, então realiza-se, a partir de A, um percurso de comprimento |x|, no sentido horário, com ponto final do percurso sendo P.

A circunferência λ definida anteriormente é chamada de ciclo ou circunferência trigonométrica.

Se o ponto P está associado ao número x, então se diz que P é a imagem de x no ciclo.

Após isso, será retomado o conceito do círculo trigonométrico para a representação dos conceitos de seno, cosseno e tangente como definidas:

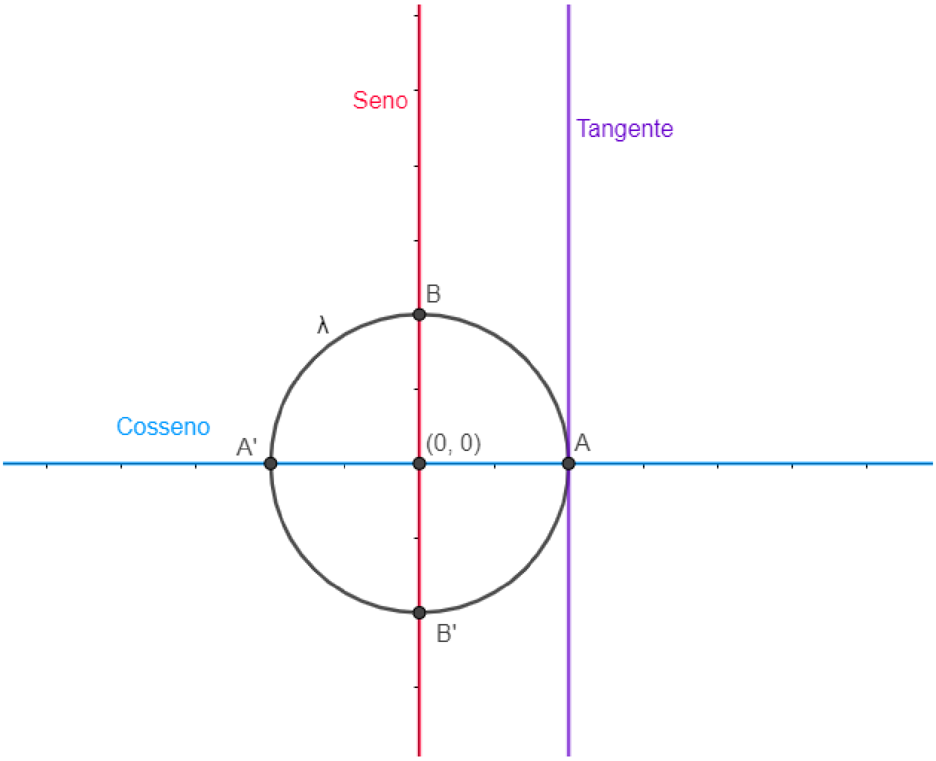
Considerando o ciclo trigonométrico de origem A definido anteriormente, serão associadas ao ciclo trigonométrico as funções circulares de forma que:

1°) Eixo x será considerado o eixo dos valores referente ao cosseno, com sentido positivo de O → A;

2°) Eixo y será considerado o eixo dos valores referente ao seno, com sentido positivo de O → B;

3°) Será construído uma reta paralela ao eixo y e que intercepte o ciclo trigonométrico apenas no ponto A, que representará os valores referentes à tangente e com sentido positivo igual ao eixo do seno.

Figura 10: Seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico



Fonte: Acervo dos autores

Em seguida, será explicitado o conceito de função seno, função cosseno e função tangente. Inicialmente será definida a função seno.

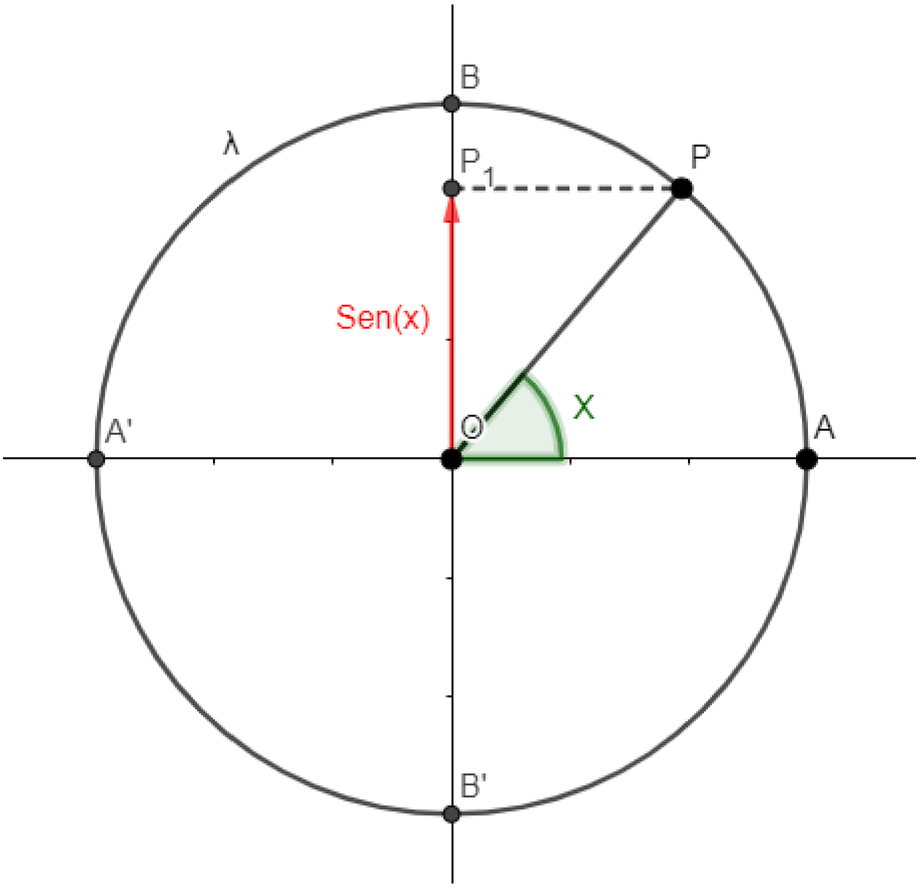
Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos sen(x)) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema x0y.

Denominamos função seno a função f: IR→IR que associa a cada x real o real

$\overline{OP_1}$ = sen(x), isto é:

$$f(x) = sen(x)$$

Figura 11: Valor de seno no círculo trigonométrico.



Fonte: Acervo dos autores

Após isso, serão comentadas algumas propriedades da função seno, tais como:

1°)A imagem da função seno é intervalo [-1,1], isto é, -1 ≤ sen(x) ≤ 1 para todo x real.

2°)Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então sen(x) é positivo.

3°)Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então sen(x) é negativo.

4°)Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então sen(x) é crescente.

5°)Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então sen(x) é decrescente.

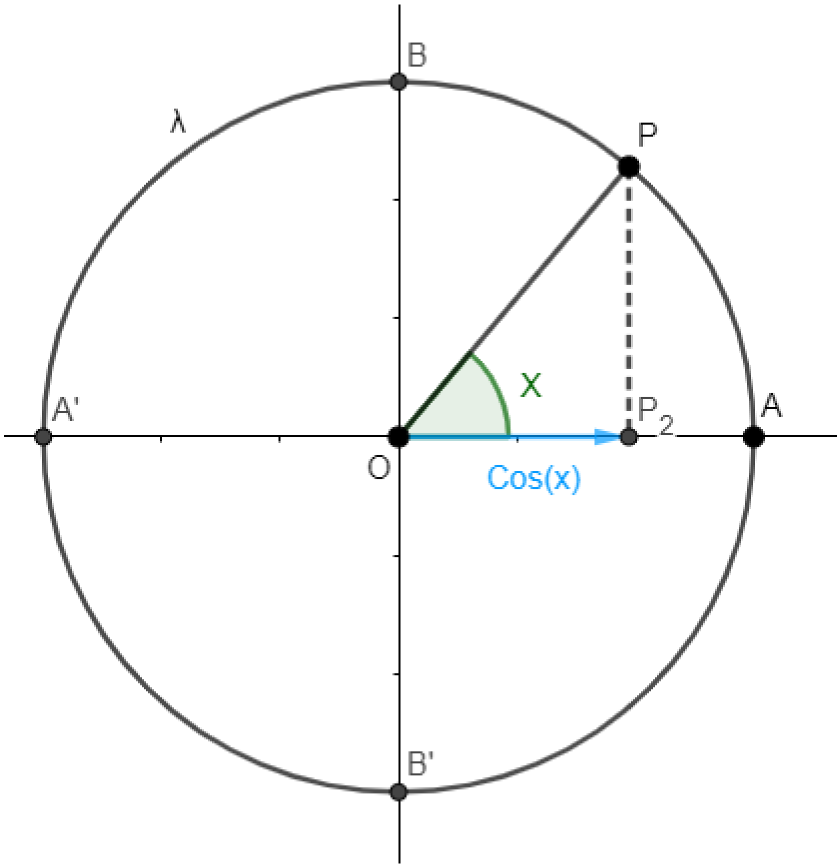
Após isso, será comentado sobre a função cosseno a partir da definição abaixo.

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos cos(x)) a ordenada $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema x0y.

Denominamos função cosseno a função f: IR→IR que associa a cada x real o real $\overline{OP_2} = \cos(x)$, isto é:

$$f(x) = \cos(x)$$

Figura 12: Valor de cosseno no círculo trigonométrico.



Fonte: Acervo dos autores

Após isso, serão comentadas algumas propriedades da função seno, tais como:

1°)A imagem da função cosseno é intervalo [-1,1], isto é, -1 ≤ cos(x) ≤ 1 para todo x real.

2°)Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então cos(x) é positivo.

3°)Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então cos(x) é negativo.

4°)Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então cos(x) é crescente.

5°)Se x percorre o primeiro ou segundo quadrante, então cos(x) é decrescente.

Na sequência, será retomado o conceito de ciclo trigonométrico e, com base nos conceitos das funções seno e cosseno vistos, será construído o gráfico de tais funções, evidenciado que, por se tratar de uma circunferência, as imagens de $x_0, x_0 \pm 2\pi, x_0 \pm 4\pi, x_0 \pm 6\pi, \ldots$ são iguais, ou seja, há uma periodicidade com o período de 2π nas imagens de tais pontos. Espera-se que os alunos compreendam tal conceito e que contribuam na construção de tais gráficos abaixo.

Para a construção do gráfico da função seno será comentado sobre os valores que a função seno possui em determinados pontos no intervalo [0,2π], e, a partir disso, será construída a tabela abaixo.

Tabela 2: Comportamento do seno.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
senx	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0

Fonte: Acervo dos autores

Após isso, será comentado que é possível construir o gráfico da função seno, chamada de senoide, como na Figura x. Será dado ênfase sobre a limitação da imagem da função seno no intervalo [-1,1] e repetição dos valores entre 0 e 2π, no intervalo [0,2π].

Figura 13: Gráfico da função seno.

Fonte: Acervo dos autores

Para a construção do gráfico da função cosseno será comentado sobre os valores que a função cosseno possui em determinados pontos no intervalo [0,2π]. A partir disso, será construída a tabela abaixo.

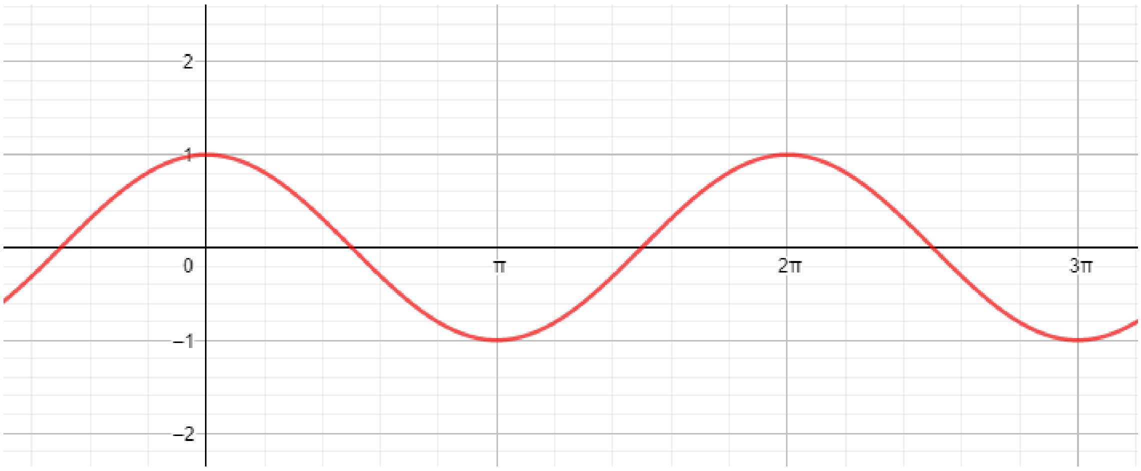
Tabela 3: Comportamento do cosseno.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cosx	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

Fonte: Acervo dos autores

Após isso, será comentado que é possível construir o gráfico da função cosseno, chamada de cossenóide, como na Figura x. Será enfatizada a limitação da imagem da função cosseno no intervalo [-1,1] e, nesse caso, focarmos o domínio entre 0 e 2π, ou seja, o intervalo [0,2π]. No entanto, é importante frisar que o domínio da função cosseno é o conjunto IR, o conjunto dos números reais.

Figura 14: Gráfico do cosseno.



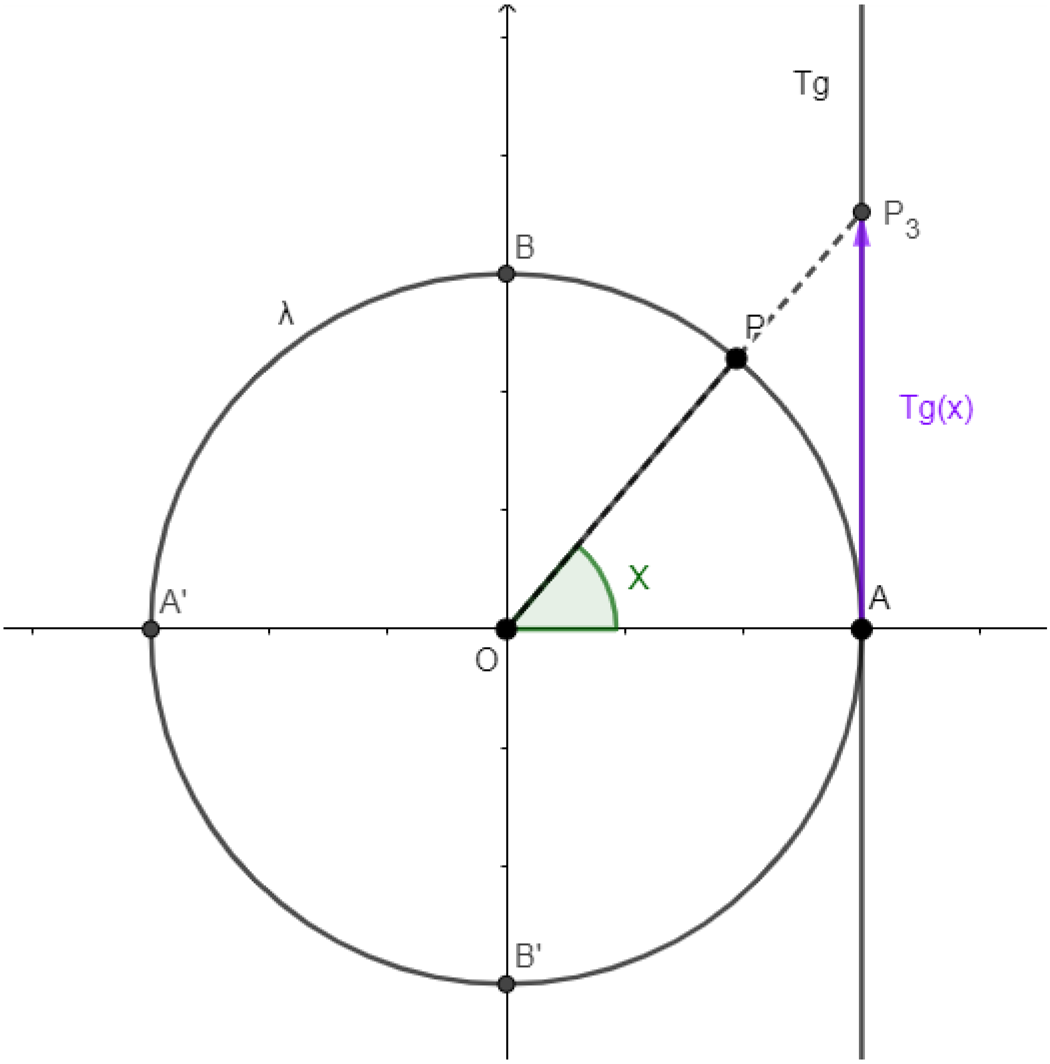
Fonte: Acervo dos autores

Em seguida, será comentado sobre a função tangente a partir da definição abaixo.

Denominamos tangente de x (e indicamos tg(x)) o segmento formado pelo ponto A e o ponto de intersecção entre a ordenada $\overline{OP}$ e o eixo das tangentes, representado pelo ponto P_3, em relação ao sistema x0y. Denominamos função tangente a função f: ID→IR que associa a cada x real o número real $\overline{OP_3} = tg(x)$, isto é:

$$f(x) = tg(x)$$

Figura 15: Valor da tangente no círculo trigonométrico.



Fonte: Acervo dos autores

A partir da Figura acima, temos que os valores possíveis de x, é qualquer número real, com $x \neq \frac{\Pi}{2} + k\Pi$, pois, nesses pontos $\overline{OP_3}$ é paralelo ao eixo das tangentes e, neste caso, não existe o ponto P_3 e, consequentemente, a tg x não é definida.

Após isso, serão comentadas algumas propriedades da função tangente, tais como:

1°) O domínio da função tangente é $D=\{x \in IR \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

2°)A imagem da função tangente é IR, isto é, para todo y real, existe um x real tal que tg x = y.

3°) Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então tg(x) é positivo.

4°) Se x é do segundo ou quarto quadrante, então tg(x) é negativo.

5°) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tg(x) é crescente.

6°) A função cosseno é periódica e seu período é π.

Em seguida será comentado sobre as características do gráfico da função tangente, tomando o intervalo $[0,2\pi]$ e o sentido anti-horário. A partir disso, será construída a tabela.

Tabela 4: Comportamento da tangente.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
tgx	0	cresce	$\nexists$	cresce	0	cresce	$\nexists$	cresce	1

Fonte: Acervo dos autores

Após isso, será comentado que é possível construir o gráfico da função tangente, chamada de tangentóide, como na Figura x. Será enfatizada a limitação da imagem da função tangente nos pontos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e repetição dos valores entre 0 e π.

Figura 16: Gráfico da função tangente.

Fonte: Acervo dos autores

Em seguida os alunos serão instigados a resolverem os seguintes exercícios.

(Unioeste - 2018) Em uma área de proteção ambiental existe uma população de coelhos. Com o aumento natural da quantidade de coelhos, há uma oferta de alimento para predadores. Os predadores com a oferta de alimento também aumentam seu número e abatem mais coelhos. O número de coelhos volta então a cair. Forma-se assim um ciclo de oscilação do número de coelhos nesta reserva. Considerando-se que a população p(t) de coelhos fica modelada por $p(t) = 1000 - 250\,\text{sen}(\frac{2\pi t}{360})$, sendo $t \geq 0$ a quantidade de dias decorridos, e o argumento da função seno é medido em radianos, pode-se afirmar que:

a) A população de coelhos é sempre menor ou igual a 1000 indivíduos.

b) Em quatro anos a população de coelhos será extinta.

c) A população de coelhos sobrará em 3 anos.

d) A quantidade de coelhos só volta a ser de 1000 indivíduos depois de 360 dias.

e) A população de coelhos atinge seu máximo em 1250 indivíduos.

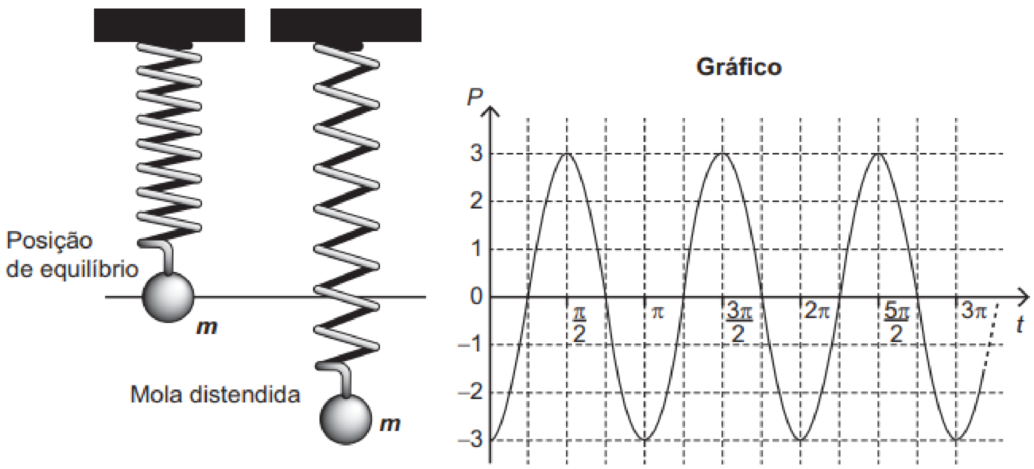
Resolução:

Como π = 180°, temos que a função pode ser escrita como $\mathbf{p(t) = 1000 - 250\,sen(t)}$ e pela função seno variar entre o intervalo [-1,1] temos que a população de coelhos varia entre 750 e 1250.

Logo a alternativa “e” é a correta.

(ENEM - 2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundos) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A\cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A\,\text{sen}(\omega t)$ em que A > 0 é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.



A expressão algébrica que representa as posições P(t) da massa m, ao longo do tempo, no gráfico, é:

a) -3 cos(2t)

b) -3 sen(2t)

c) 3 cos(2t)

d) -6 cos(2t)

e) 6 sen(2t)

Resolução:

Temos que T = π e, consequentemente, $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, a amplitude de deslocamento máximo é 3, ou seja, A = ± 3. Por fim, temos que a amplitude inicial corresponde a -3, logo, é necessário que a equação para t = 0 corresponda a 1 ou -1, o que ocorre tomando a função cosseno com a amplitude de -3. Logo a resposta correta é a alternativa "a".

(Unioeste - 2013) Uma loja do ramo de som vende instrumentos musicais e renova todo mês seu estoque de violas em 60 unidades. A função que aproxima o estoque de violas da loja ao longo do mês é $f(x) = 30(\cos(\frac{\Pi x}{30}) + 1)$, sendo que x é o dia do mês (considerando o mês comercial de 30 dias) e f(x) é o estoque ao final do dia x. Nos termos apresentados, é correto afirmar que:

a) Ao final do mês, metade do estoque ainda não foi vendido.

b) A loja vende metade do seu estoque até o dia 10 de cada mês.

c) No dia 15 de cada mês, metade do estoque do mês foi vendido.

d) Ao fim do mês, a loja ainda não vendeu todo o estoque de violas.

e) O estoque em um determinado dia do mês é exatamente metade do estoque do dia anterior.

Resolução:

a) Ao final do dia 30 temos que a equação toma a forma:

$f(x) = 30(\cos(\frac{\Pi 30}{30}) + 1) = 30(\cos(\pi) + 1) = 30(-1 + 1) = 0$, **logo, todo o estoque de violas é vendido.**

b) Temos que no dia 10, a equação toma a forma:

$f(x) = 30(\cos(\frac{\Pi 10}{30}) + 1) = 30(\cos(\frac{\Pi}{3}) + 1) = 30(\frac{1}{2} + 1) = 30(\frac{3}{2}) = 45$, **logo, o estoque vendido é de apenas 25%.**

c) Temos que no dia 15 do mês a equação toma a forma:

$f(x) = 30(\cos(\frac{\Pi 15}{30}) + 1) = 30(\cos(\frac{\Pi}{2}) + 1) = 30(0 + 1) = 30$, **logo, a alternativa está correta.**

d) Como visto na alternativa "a", ao fim do mês todo estoque é vendido.

e) Por se tratar de uma função cosseno, não há uma alteração significativa em um intervalo pequeno.

(ENEM - 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo P(t) = A + Bcos (kt) em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

a) P(t) = 99 + 21cos (3πt)

b) P(t) = 78 + 42cos (3πt)

c) P(t) = 99 + 21cos (2πt)

d) P(t) = 99 + 21cos (t)

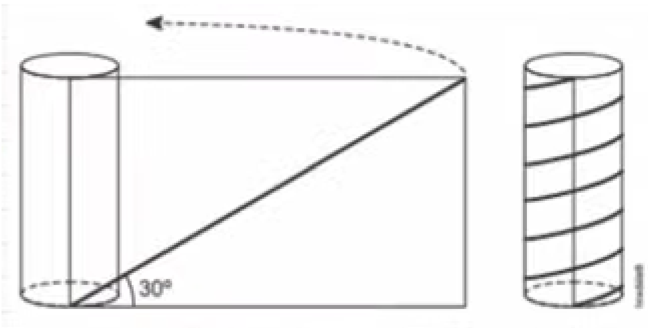
e) P(t) = 78 + 42cos (t)

Resolução:

A pressão cardíaca média é $\frac{78+120}{2} = 99$, com variação de ± 21, já que a função cosseno varia entre 1 e -1. Dessa forma, obtêm-se os coeficientes A = 99 e o B = 21. Basta encontrar o perioda da função, para isso, sabe-se que ocorreram 90 batimentos em 1 minuto, logo ocorreu 1 batimento a cada $\frac{2}{3}$ s. Pela equação de um período temos que $P = \frac{2\Pi}{K} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2\Pi}{K} \Rightarrow K = \frac{6\Pi}{2} = 3\Pi$, logo K = 3$\pi$ e a equação procurada é:

$$\mathbf{P(t) = 99 + 21cos(3\Pi t)}$$

(Enem - 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente na qual está desenhada em negrito diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\Pi}$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



O valor da medida da altura do cilindro, em centímetros é:

a) $36\sqrt{3}$

b) $24\sqrt{3}$

c) $4\sqrt{3}$

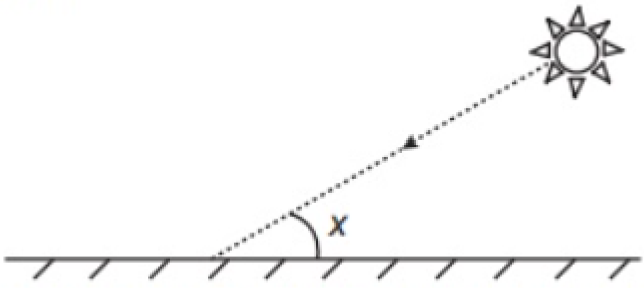
d) 36

e) 72

Resolução:

Inicialmente é necessário encontrar o comprimento da base do cilindro, para isso, utiliza-se a equação $C = 2\Pi r = 2\Pi\frac{6}{\Pi} = 12$cm, como são dadas 6 voltas ao redor do cilindro, temos que C = 12.6 = 72cm. Em seguida, toma-se a equação $tg(30°) = \frac{h}{72} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{72} \Rightarrow h = 24\sqrt{3}$cm.

(ENEM - 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $\mathrm{I(x)} = \mathrm{k} \times \mathrm{sen(x)}$, sendo k uma constante e supondo-se que x está entre 0º e 90º.



Quando x = 30º a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33%
b) 50%
c) 57%
d) 70%
e) 86%

Resolução:

Quando o sol está a 90° ocorre a maior intensidade luminosa, sendo representada por I(x) = k.sen(90°) = k.1 = k. Com o sol a 30° a equação dada toma a forma $\mathbf{I(x)} = \mathbf{k.sen(30°)} = \mathbf{k}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0,5k}$, logo, a intensidade se reduz a 50% de seu percentual máximo.

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos. Além disso, durante a resolução dos exercícios os alunos serão acompanhados e avaliados com base na compreensão do conteúdo e nas interações realizadas.

Referências:

DANTE. **Tudo é Matemática**. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, C.; IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar - Trigonometria -** Vol. 1 - 8ª Ed. Editora: Atual. 2004.

UNIOESTE - **Prova da Segunda Etapa** (Segundo dia). [S. l.], 2018. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/images/files/content/Vestibular_2018/Provas_-_Segunda_Etapa_-_Tarde.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

UNIOESTE - **Prova da Segunda Etapa** (Segundo dia). [S. l.], 2013. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2013/027.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2021 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2018 – **Exame Nacional do Ensino Médio.** INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2017 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf - Acesso em: 8 abr. 2022.

4.2.1 Relatório de aula 2.

No dia vinte e oito de maio de 2022, às 08 horas, iniciou-se os trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado II, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste-Campus Cascavel, com a atuação dos discentes no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT). Estavam presentes na aula os acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a aula, a professora orientadora Andréia Büttner Ciani e 16 alunos.

A aula iniciou-se pedindo aos alunos se eles haviam tentado resolver os exercícios deixados para casa. Uma grande parte dos alunos respondeu que não haviam tentado e a outra parte da sala disse que já tinham feito. Considerando que na primeira aula não tinha sido visto todo o conteúdo programado, os estagiários informaram aos alunos que a correção seria realizada quando o conteúdo fosse terminado, assim, aqueles que não haviam tentado poderiam fazer a atividade e aqueles que já haviam feito deveriam analisar se haviam feito corretamente.

Após isso, foi solicitado que os alunos formassem grupos e então, foi dado sequência ao conteúdo da aula anterior, na qual foi trabalhado os conceitos de seno, cosseno, tangente e ângulos notáveis. Para encontrar os ângulos notáveis, os estagiários fizeram, junto com os alunos, a dedução da medida dos ângulos de 30º e 45º, como descrito no plano de aula, e deram um tempo para que os alunos deduzissem as medidas do seno, cosseno e tangente do ângulo notável de 60º. Neste momento, os alunos não tiveram muitas dúvidas, o que faz acreditar que as definições e deduções foram compreendidas pelos alunos. Para facilitar a memorização do conteúdo, foi passado aos alunos alguns macetes, dos quais: SOH CAH TOA, para a memorização das razões que formam o seno, cosseno e tangente, no qual, S=seno, Cosseno, E=tangente, O=cateto oposto, A=cateto adjacente e H=hipotenusa e ainda, foi passado a musiquinha dos ângulos notáveis. Após este, já estava na hora do intervalo, sendo que nesse momento, os alunos foram liberados.

Após o intervalo, iniciou-se o conteúdo programado para a segunda aula. O conteúdo programado para a aula era de Funções Trigonométricas, na qual pretendia-se: compreender e calcular as razões trigonométricas na circunferência; conhecer, demonstrar e aplicar a relações fundamentais da Trigonometria; resolver equações e inequações trigonométricas; construir os gráficos das funções trigonométricas, determinando sua imagem e período, bem como aplicá-las na modelação de fenômenos periódicos.

Inicialmente foram trabalhados os conceitos de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico. Neste momento, foi possível ver que os alunos tiveram algumas dificuldades em conseguir identificar tais medidas no círculo trigonométrico, diferente de quando realizado apenas em um triângulo retângulo. A maior dificuldade dos alunos estava em perceber que o círculo trigonométrico estava com centro na origem do plano cartesiano e possuía raio um e portanto, quando pedíamos para identificarem o seno ou cosseno de um ângulo x, tinham dificuldade em identificar o valor do seno ou cosseno desse ângulo. Percebendo esta dificuldade, os estagiários voltaram ao quadro em uma tentativa de explicar de outra forma na intenção de esclarecer o conteúdo. Para isso, tomaram o ângulo 180º e relembraram que, para encontrar o seno deve sempre analisar o eixo y no plano cartesiano e, para encontrar o cosseno deve sempre analisar o eixo x no plano cartesiano. Ao questionar qual seria o seno de 180º, alguns alunos responderam acertadamente, porém outros disseram não entender o motivo de ser zero, “se o círculo passa no um”. Neste momento os estagiários perceberam que alguns alunos estavam confundindo o eixo que deviam analisar e questionaram os alunos “se queremos o seno de 180º, qual eixo devemos analisar?” e rapidamente os alunos responderam que era o eixo y e os estagiários realizaram um novo questionamento “se devemos analisar o eixo y, devemos analisar na vertical, certo? Então, no 180º e analisando em relação apenas ao eixo y, qual o valor que o seno assume?”. Neste momento os alunos levaram alguns segundo para raciocinar e um aluno comentou “zero, pois está em cima do eixo x, o qual é o 0 no eixo y” e, após a fala do aluno foi possível escutar comentários como “agora eu entendi”, “é mais fácil do que eu estava pensando” e “por que na escola não ensinam assim, só pedem pra decorar?" e isso fez com que os estagiários acreditassem que o conteúdo havia sido assimilado pelos alunos.

Após a discussão, restavam ainda 20 minutos de aula e então, os estagiários informaram aos alunos que prosseguiram com o conteúdo na próxima aula pois haviam preparado um jogo que envolvia as relações trigonométricas. Com os alunos em grupos foi distribuído os baralhos trigonométricos. O jogo se chama “pife trigonométrico” e consiste em formar três trincas de cartas iguais ou que tenham o mesmo resultado. Para saber se as cartas têm o mesmo resultado, basta resolver as relações que tem nela e encontrar o valor resultante, por exemplo: $tg\ 30º = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{sen\ 30º}{cos\ 30º}$, ou seja, as cartas que contenham esses valores formam uma trinca. Cada estagiário ficou em um grupo para que pudesse auxiliar os alunos e o jogo foi realizado até o fim da aula. A aula acabou às 11h40m.

Como já mencionado, não foi possível trabalhar todo o conteúdo planejado para a segunda aula e será dado sequência no decorrer da próxima aula. Durante toda a execução da aula o enfoque esteve no aprendizado dos alunos e portanto, acredita-se que a aula foi satisfatória e proveitosa. Tiveram grandes participações e os alunos expuseram as suas dúvidas, sendo possível saná-las.

Acredita-se que este atraso no conteúdo, pode ser atribuído ao atraso que ocorreu na primeira aula, e que decorreu de dois motivos: em parte, ao fato de possuir diferentes faixas etárias de idade dos alunos na sala e também, ao tempo destinado para a apresentação do projeto, dos estagiários e dos alunos. Acredita-se que para a próxima aula já seja possível normalizar este atraso e seguir no tempo planejado.

Além do supracitado, outra grande dificuldade foi quanto a organização do quadro, porém, ao comparar com a primeira aula, já foi possível ver uma melhora pois, diferentemente da aula anterior, foram escritas as definições, o passo a passo de todas as contas e não apenas falado verbalmente, conforme ocorreu na primeira aula.

De modo geral o plano de aula foi executado conforme planejado com algumas ressalvas, pois não foi possível abordar todo o conteúdo programado. Porém, fora isso, não ocorreram grandes imprevistos que contribuíssem para uma mudança drástica na execução da aula. Conclui-se que a aula foi produtiva e satisfatória atendendo as expectativas.

4.3 Plano de aula 3 – 04/06.

Plano de aula - Aula 3

Conteúdo: Relações Trigonométricas.

Objetivo geral: Trabalhar sobre relações trigonométricas.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com relações trigonométricas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender os conceitos das funções secante, cossecante e cotangente, vendo essas funções como as inversas do cosseno, seno e tangente;
- Compreender as deduções das relações trigonométricas básicas e ser capaz de utilizá-las nas questões;
- Associar as relações com os conteúdos de seno, cosseno e tangente trabalhados anteriormente;
- Resolver as questões propostas;
- Construir os gráficos das funções secante, cossecante e cotangente;
- Compreender as propriedades das funções secante, cossecante e cotangente.

Tempo de execução:

Um encontro de 3 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Giz, lousa, projetor, lâminas e folha impressa com exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente será comentado, brevemente, o que são as relações trigonométricas com base na definição abaixo.

As relações trigonométricas são relações entre valores das funções trigonométricas de um mesmo arco. Para cada x real definimos sen x, cos x, sec x, cossec x, para $x \neq \frac{k\pi}{2}$ definimos a função tangente e para $x \neq k\pi$ a função cotangente.

Nesta aula será mostrado que essas seis funções possuem entre si algumas relações em que, a partir de uma delas é sempre possível demonstrar as outras cinco.

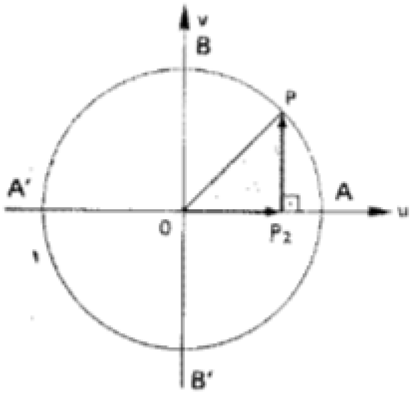
Para iniciar o conteúdo, será apresentado o seguinte teorema:

Teorema: Para todo x real vale a relação $sen^2x + cos^2x = 1$

Em seguida, os alunos serão questionados se eles sabem o porquê isso acontece. Acredita-se que os alunos não saibam responder, considerando que a demonstração não é comumente abordada no ensino médio das redes estaduais de ensino. Após, será feito a demonstração do teorema, sempre instigando os alunos a usar do seu pensamento crítico:

Demonstração: Se x é um ângulo tal que $x \neq \frac{k\Pi}{2}$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então existe o triângulo OP_2P retângulo, como construído na Figura seguinte:

Figura 17: Projeção de um triângulo retângulo no círculo trigonométrico.



Fonte: Iézzi (2004)

Pelo teorema de Pitágoras temos que
$|\overline{OP_2}|^2 + |\overline{P_2P}|^2 = |\overline{OP}|^2$, então $sen^2x + cos^2x = 1$

Se $x = \frac{k\Pi}{2}$, podemos verificar diretamente a igualdade obtida utilizando alguns valores, como na Tabela 5:

Tabela 5: Valores de sen² x + cos² x

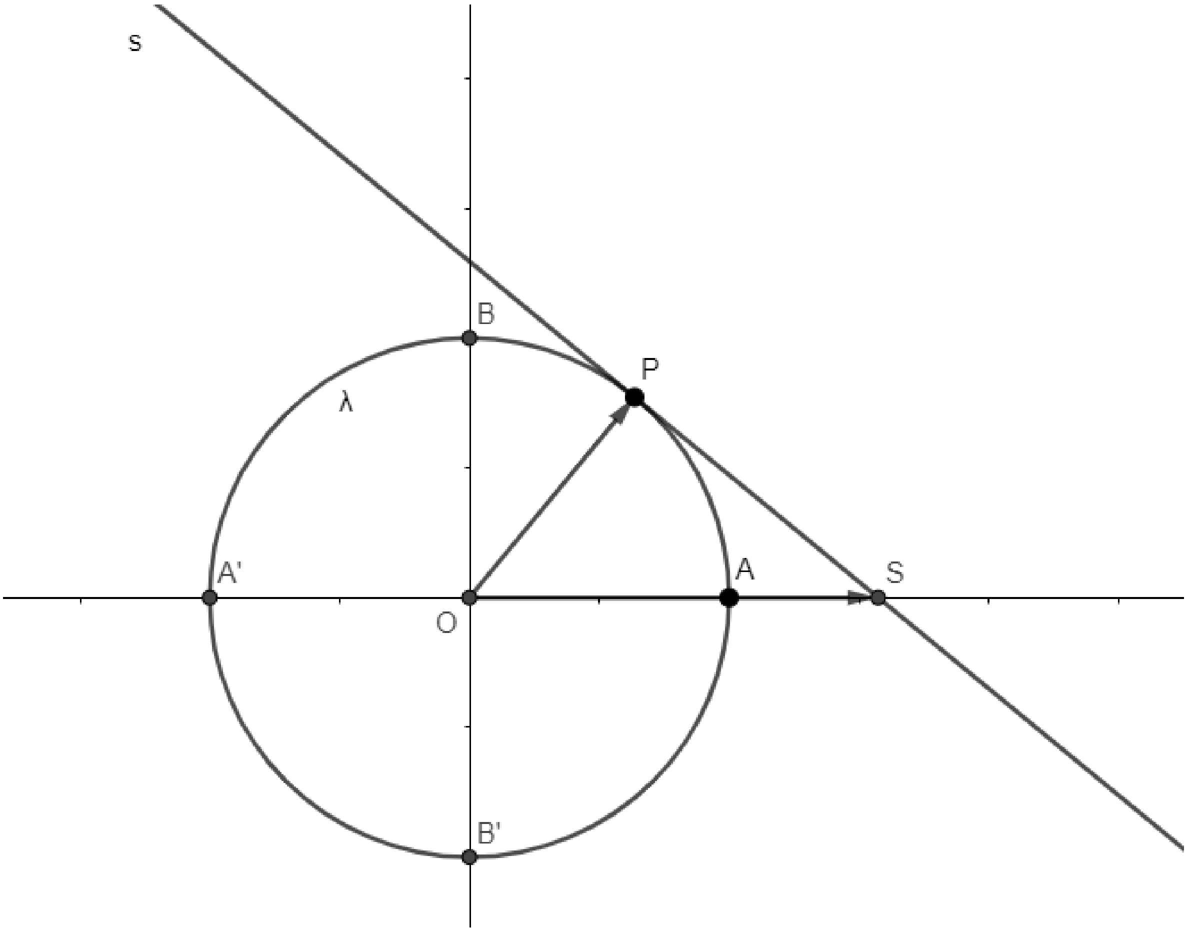
x	Sen x	Cos x	$\mathrm{sen}^2\mathrm{x} + \cos^2\mathrm{x}$
0	0	1	1
Π	1	0	1
$\frac{\Pi}{2}$	0	-1	1
2Π	-1	0	1

Após isso, serão introduzidos os conceitos, e algumas propriedades, das funções secante, cossecante e cotangente, iniciando-se pela função secante, esperamos que os alunos consigam compreender seu conceito com base na definição abaixo.

Dado um número real x, $x \neq \frac{\Pi}{2} + k\Pi$, seja P um dos pontos que formam o ângulo x, como ilustrado na Figura x. Consideramos a reta s tangente ao ciclo em P e S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de x (e indicamos sec x)) a abscissa $\overline{OS}$ do ponto S. Denominamos *função secante* a função f: D→IR que associa a cada x real,$x \neq \frac{\Pi}{2} + k\Pi$, o real $\overline{OS} = sec(x)$, isto é:

f(x) = sec(x)

Figura 18: Valor da secante no círculo trigonométrico.



Fonte: Acervo dos autores

Notamos que, para $x = \frac{\Pi}{2} + k\Pi$, P está em B ou B', então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto S, a Sec(x) não é definida.

Após isso, com base na construção anterior, serão evidenciadas algumas propriedades da função secante, tais como:

1°)O domínio da função secante é D = {x ∈ IR l $x \neq \frac{\Pi}{2} + k\Pi$}.

2°)A imagem da função secante é IR - (-1,1), isto é, para todo real y, com y ≤ -1 ou y ≥ 1, existe um x real tal que sec(x) = y.

3°) Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então sec(x) é positivo.

4°)Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então sec(x) é negativo.

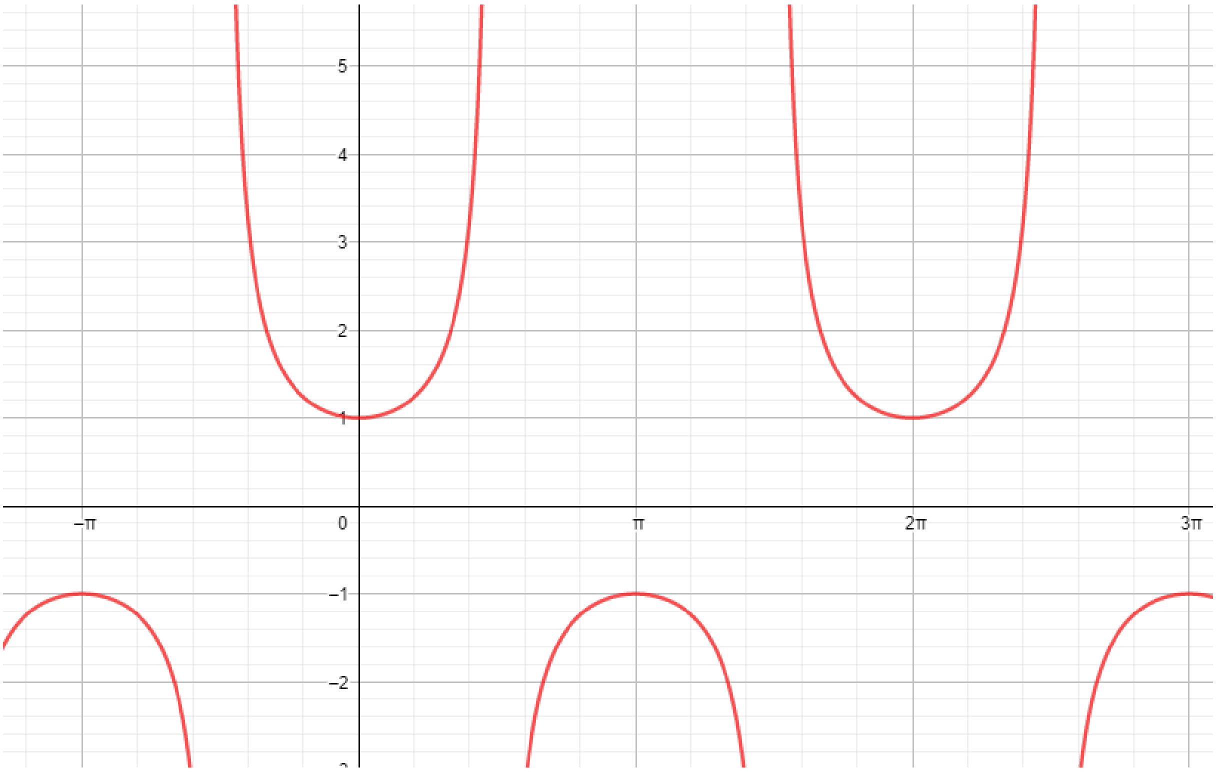
5°)Se x percorre o primeiro ou segundo quadrante, então sec(x) é crescente.

6°)Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então sec(x) é decrescente.

7°)A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

Após isso, será construído, e evidenciado, que o gráfico da função secante, como representado na Figura x, possui limitação da imagem nos pontos $x = \frac{\Pi}{2} + k\pi$ e que seus valores se repetem ao longo do domínio baseando-se nos valores do intervalo entre 0 e 2π.

Figura 19: Gráfico da função secante.



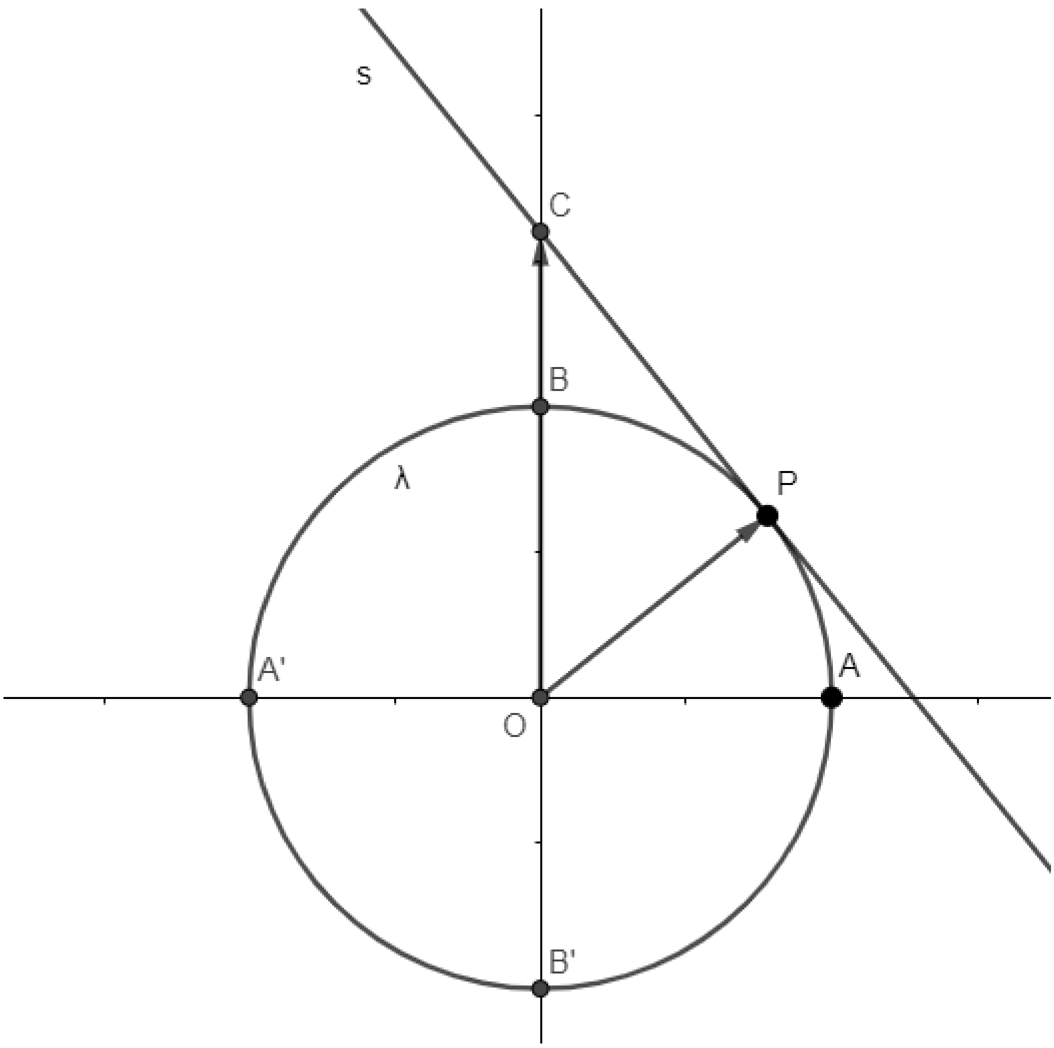
Fonte: Acervo dos autores

Após isso, será definida a função cossecante com base na definição abaixo.

Dado um número real x, x $\neq$ kπ, seja P sua imagem no ciclo. Consideramos a reta s tangente ao ciclo em P e C sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de x (e indicamos cossec(x)) a ordenada $\overline{OC}$ do ponto C. Denominamos *função Cossecante* a função f: D→IR que associa a cada x, x $\neq$ kπ, real o real $\overline{OC} = cossec(x)$, isto é:

f(x) = cossec(x)

Figura 20: Valores da cossecante no círculo trigonométrico.



Fonte: Acervo dos autores

Notamos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a cossec(x) não é definida.

Após isso, serão comentadas algumas propriedades da função cossecante, tais como:

1°)A imagem da função cossecante é $D = \{x \in IR \text{ I } x \neq k\pi\}$.

2°)A imagem da função cossecante é IR - (-1,1), isto é, para todo real y, com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um x real tal que cossec(x) = y.

3°) Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então cossec(x) é positivo.

4°)Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então cossec(x) é negativo.

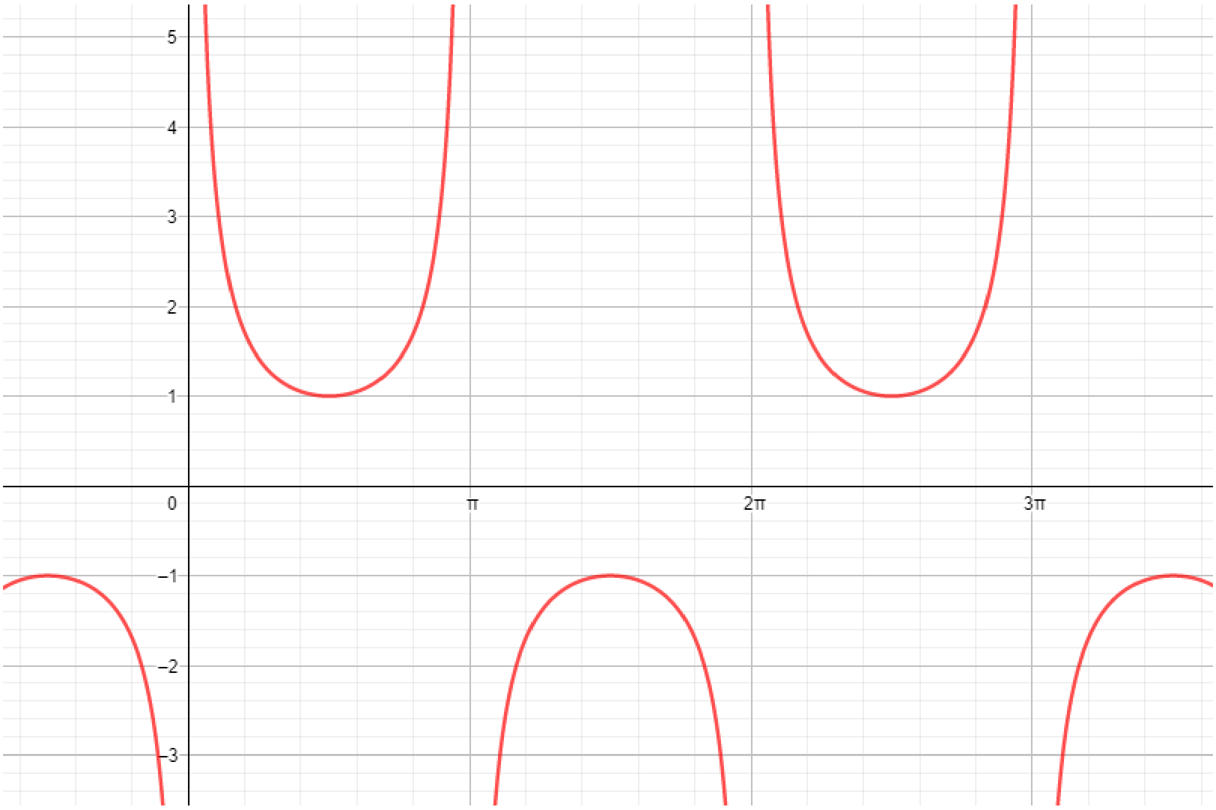
5°)Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então cossec(x) é crescente.

6°)Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então cossec(x) é decrescente.

7°)A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

Em seguido, será construído, e evidenciado, que o gráfico da função cossecante, como representado na Figura x, possui limitação da imagem nos pontos $x = k\pi$ e que seus valores se repetem ao longo do domínio baseando-se nos valores do intervalo entre 0 e 2π.

Figura 21: Gráfico da função cossecante.



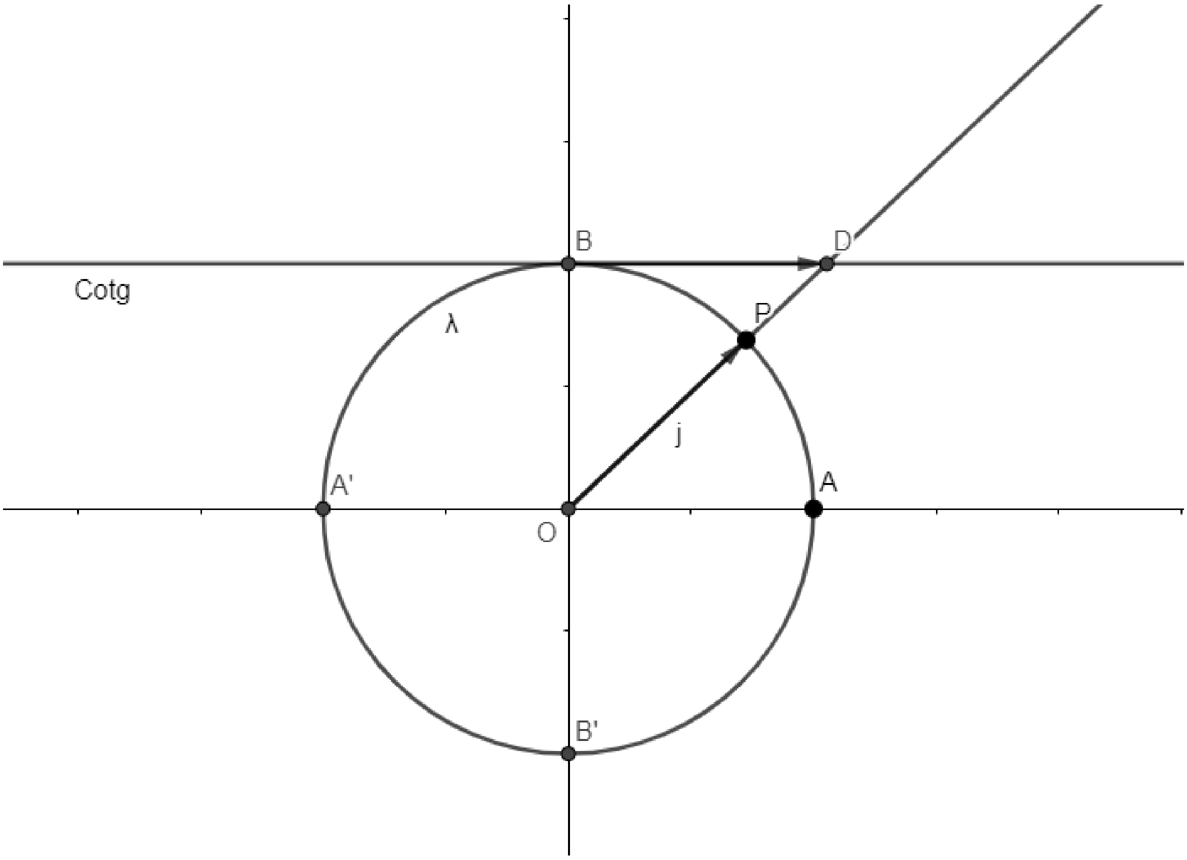
Fonte: Acervo dos autores.

Após isso, será apresentada a função cotangente, com base na definição abaixo.

Dado um número x real, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideramos a reta $\overline{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de x (e indicamos cotg(x)) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$. Denominamos *função Cotangente* a função f: D→IR que associa a cada x real,$x \neq k\pi$, o real $\overline{BD}. = cotg(x)$, isto é:

f(x) = cotg (x)

Figura 22: Valores da cotangente no círculo trigonométrico



Fonte: Acervo dos autores

Notamos que, para x = kπ, P está em A ou A’ e, então, a reta $\overline{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto D, a cotg x não é definida.

Após isso, serão comentadas algumas propriedades da função cotangente, tais como:

1°)O domínio da função cotangente é D={x ∈ IR | x ≠ $k\pi$}

2°)A imagem da função tangente é IR, isto é, para todo y real, existe um x real tal que cotg x = y.

3°)Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então cotg (x) é positivo.

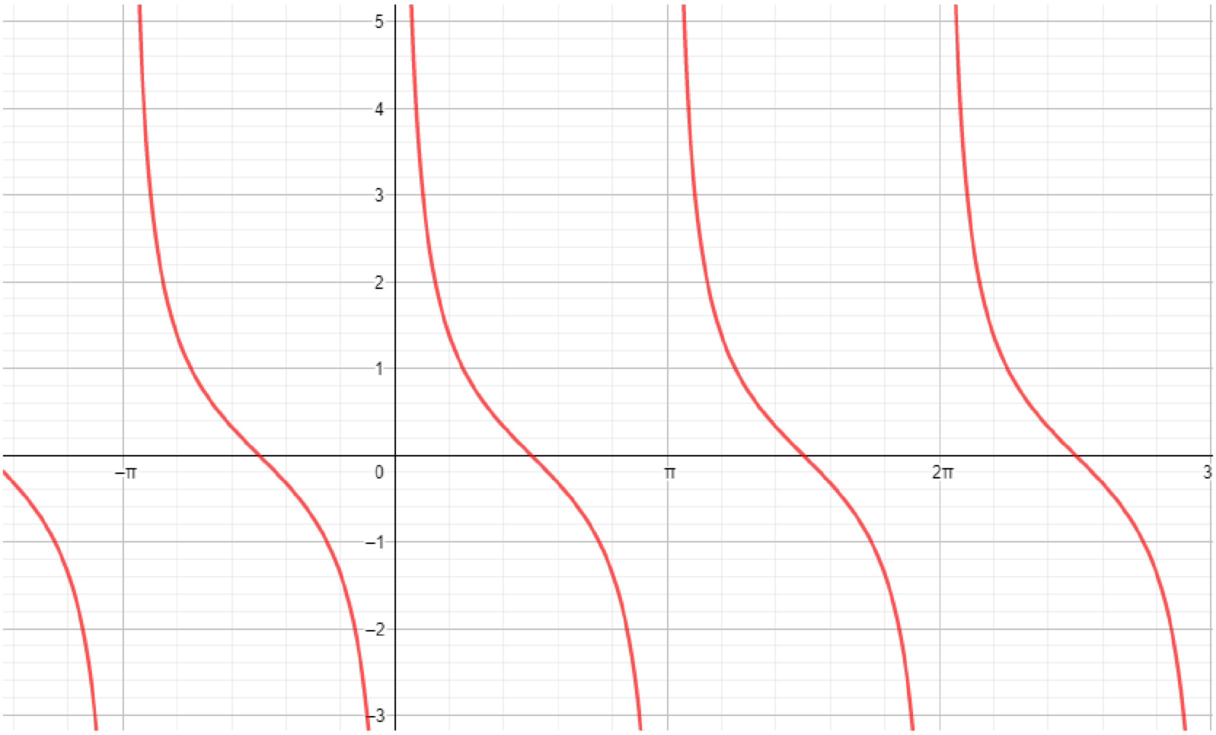
4°)Se x é do segundo ou quarto quadrante, então cotg (x) é negativo.

5°)Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tg (x) é decrescente.

6°)A função cosseno é periódica e seu período é π.

Após isso, será construído, e evidenciado, que o gráfico da função cotangente, como representado na Figura x, possui limitação da imagem nos pontos $x = k\pi$ e que seus valores se repetem ao longo do domínio baseando-se nos valores do intervalo entre 0 e π.

Figura 23: Gráfico da função cotangente.



Fonte: Acervo dos autores

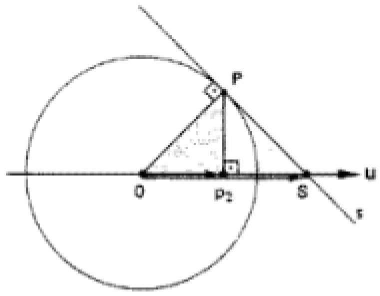
Por fim, serão trabalhadas algumas relações fundamentais da trigonometria envolvendo as funções vistas até o momento e suas demonstrações. Espera-se que os alunos consigam compreender tais conceitos por, de forma geral, serem intuitivos aos conteúdos trabalhados até o momento.

Teorema: Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}}$$

Demonstração

Se x ≠ ks, a imagem de x é distinta de A, B, A e B,



então temos:

$\Delta OAT \sim \Delta OP_2P$

$\frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|P_2P|}{|OP_2|}$

$|tg\ x| = \frac{|sen\ x|}{|cos\ x|}$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal da tg x é igual ao do quociente $\frac{sen\ x}{cos\ x}$

De 1 e 2 decorre a tese

Tabela 6: sinal da tg x e de (sen x)/(cos x).

0	sinal de tg x	sinal de $\frac{sen\ x}{cos\ x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

Fonte: Acervo dos autores.

Se x = kπ, temos:

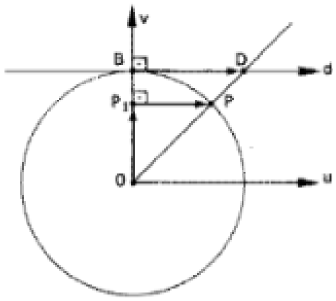
$$tg\ x\ =\ 0\ = \frac{sen\ x}{cos\ x}$$

Teorema: Para todo x real, x ≠ kπ, vale a relação

$\boxed{\text{cotg x} = \frac{cos\ x}{sen\ x}}$

Demonstração

Se x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A´ e B´, então temos:



$\Delta OBD \sim \Delta OP_1P$

$\frac{|BD|}{|OB|} = \frac{|P_1P|}{|OP_1|}$

$$|cotg\ x| = \frac{|cos\ x|}{|sen\ x|}$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal da cotg x é igual ao sinal do quociente.

Tabela 7: Sinal de cotg x e de (cos x)/(sen x).

0	sinal de cotg x	sinal de $\frac{cos\ x}{sen\ x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

Fonte: Acervo dos autores.

De 1 e 2 decorre a tese

Se x $= \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos cotg x $= 0 = \frac{cos\ x}{sen\ x}$

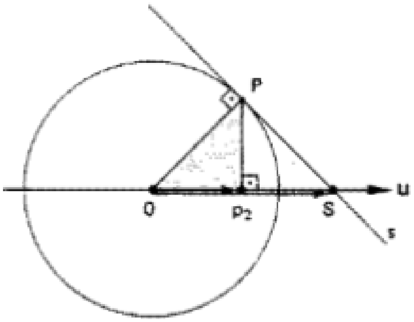
Teorema: Para todo x real, $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação

$$sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$$

Demonstração

Se x $\neq$ kπ, a imagem de x é distinga de A, B, A

e B ´, então temos:



$\Delta OPS \sim \Delta OP_2P$

$\frac{|OS|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_2|}$

$|sec\ x| = \frac{1}{|cos\ x|}$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal de sec x, é igual ao sinal de cos x (2)

De 1 e 2 decorre a tese

Tabela 8: Sinal de sec x e de cos x.

0	sinal de sec x	sinal de cos x
1º	+	+
2º	-	-
3º	-	-
4º	+	+

Fonte: Acervo dos autores.

b) Se x = kπ, temos sec x = 1 = cos x (k par) ou sec x = -1 = cos x (k ímpar).

Teorema: Para todo x real, x $\neq$ kπ, vale a relação:

$$\boxed{cossec\ x = \frac{1}{sen\ x}}$$

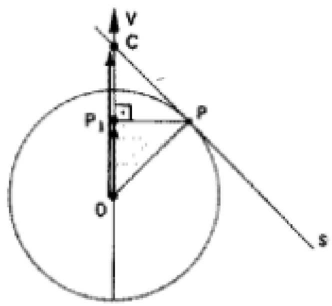
Demonstração:

Se x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A´ e B´, então temos:

$\Delta OPC \sim \Delta OP_1P$

$\frac{|OC|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_1|}$

$|cossec\ x| = \frac{1}{|sen\ x|}$



Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal de cossec x é igual ao sinal de sen x (2).

De 1 e 2 decorre a tese

Tabela 9: Sinal de cossec x e de sen x.

0	sinal de cossec x	sinal de sen x
1º	+	+
2º	+	+
3º	-	-
4º	-	-

Fonte: Acervo dos autores.

Se x = $\frac{\pi}{2}$ + kπ, temos:

$cossec\ x\ =\ 1\ = \frac{1}{sen\ x}$ (k par)

ou

$cossec\ x\ =\ -1\ = \frac{1}{sen\ x}$ (k ímpar)

Corolário: $cotg(x) = \frac{1}{tg(x)}$

Demonstração:

$cotg(x) = \frac{cosx}{senx} = \frac{1}{\frac{senx}{cosx}} = \frac{1}{tgx}$

Corolário: $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$

Demonstração:

$$tg^2(x) + 1 = \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} + 1 = \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$$
$$= sec^2(x)$$

Corolário: $1 + cotg^2(x) = cossec^2(x)$

Demonstração:

$$1 + cotg^2(x) = \frac{cos^2(x)}{sen^2(x)} + 1 = \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{sen^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{1}{sen^2(x)}$$
$$= cossec^2(x)$$

Corolário: $cos^2(x) = \frac{1}{1+tg^2(x)}$

Demonstração:

$$cos^2(x) = \frac{1}{sec^2(x)} = \frac{1}{tg^2(x) + 1}$$

Corolário: $sen^2(x) = \frac{tg^2(x)}{1+tg^2(x)}$

Demonstração:

$$sen^2(x) = \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}.cos^2(x) = tg^2(x).cos^2(x) = tg^2(x).\frac{1}{tg^2(x)+1} = \frac{tg^2(x)}{tg^2(x)+1}$$

Ao fim da aula, serão propostas as seguintes questões para que os alunos resolvam. Espera-se que, com as relações vistas, os alunos consigam desenvolver as expressões e utilizem o conteúdo de maneira correta.

1 - (UNIOESTE - 2012 - Adaptado) É correto afirmar que a expressão:

$$\boldsymbol{\frac{cos^2(x) - 2sen^2(x) + 3tg(x)}{2 - sen^2(x) - cos^2(x)}}$$

pode ser simplificada para uma única função trigonométrica?

Resolução:

$$\boldsymbol{\frac{cos^2(x) - 2sen^2(x) + 3tg(x)}{2 - sen^2(x) - cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) - 2sen^2(x) + 3tg(x)}{2 - 1(sen^2(x) + cos^2(x))}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{cos^2(x) - 2sen^2(x) + 3tg(x)}{2-1} = \frac{cos^2(x) - 2sen^2(x) + 3tg(x)}{1} =}$$

$$\boldsymbol{= cos^2(x) - 2sen^2(x) + 3tg(x) = 1 - sen^2(x) - 2sen^2(x) + 3tg(x) =}$$

$$\boldsymbol{= 1 - 3sen^2(x) + 3tg(x) = 1 - 3(sen^2(x) + tg(x)) = 1 - 3(\frac{tg^2(x)}{tg^2(x)+1} + tg(x))}$$

2 - (UNIOESTE - 2010) Resolvendo-se a inequação $\boldsymbol{\frac{1-sen^2(x)}{cotg(x)sen(x)} \leq \frac{1}{2}}$, para os possíveis valores de x em [0,2π], obtém-se como solução.

a) $\boldsymbol{\frac{\Pi}{3} \leq x \leq \frac{\Pi}{2}}$

b) $\boldsymbol{\frac{\Pi}{3} < x < \frac{3\Pi}{2}}$

c) $\boldsymbol{\frac{\Pi}{3} \leq x \leq 2\Pi}$

d) $\frac{\Pi}{3} \leq x < \frac{\Pi}{2}$

e) $\frac{\Pi}{3} < x \leq \frac{\Pi}{2}$

Resolução:

$$\frac{1 - sen^2(x)}{cotg(x)sen(x)} = \frac{cos^2(x)}{\frac{cos(x)}{sen(x)}.sen(x)} = \frac{cos^2(x)}{cos(x)} = cos(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\Pi}{3} \leq x \leq \frac{5\Pi}{3}$$

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos. Além disso, durante a resolução dos exercícios os alunos serão acompanhados e avaliados com base na compreensão do conteúdo e nas interações realizadas.

Referências:

DANTE. Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos, Funções** - Vol. 1 - 9ª Ed. Editora: Atual. 2013.

UNIOESTE - **Prova da Segunda Etapa (Tarde) . [S. l.], 2012**. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/images/ingresso/vestibular2019/gabarito-provas/provasdasegundaetapa-tarde.pdf. - Acesso em: 23 fev. 2021.

UNIOESTE **- Prova da Segunda Etapa (Tarde) . [S. l.], 2010.** Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/images/ingresso/vestibular2019/gabarito-provas/provasdasegundaetapa-tarde.pdf- Acesso em: 23 fev. 2021.

4.3.1 Relatório de aula 3.

No dia quatro de junho de 2022, às 08 horas, iniciou-se os trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio Supervisionado II, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste-Campus Cascavel, com a atuação dos discentes no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT). Estavam presentes na aula os acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a aula, a professora orientadora Andréia Büttner Ciani e 13 alunos.

A aula iniciou-se pedindo aos alunos se eles haviam pesquisado mais sobre os conteúdos iniciados na aula anterior. Como os alunos não se pronunciaram, foi dada sequência ao conteúdo que havia sido iniciado na aula anterior. Foram brevemente retomados os conceitos de ciclo trigonométrico e, com base nos conceitos das funções seno e cosseno vistos, será construído o gráfico de tais funções. Considerando que os alunos não tiveram nenhuma dúvida sobre os conceitos relembrados, seguiu-se a aula.

Primeiramente, foi trabalhado sobre o gráfico da função seno, sendo comentado com os alunos que esta função possui período de 2π, ou seja, ela é periódica, a imagem e o gráfico se repetem a cada 2π no domínio do conjunto dos reais. A função seno possui imagem restrita ao intervalo [-1, 1].

A fim de apresentar, abordar e de se trabalhar com o gráfico e suas propriedades, foi desenhado no quadro o ciclo trigonométrico e a tabela que segue.

Tabela 10: Tabela base para se trabalhar o gráfico da função seno.

X	0	π/2	Π	3π/2	2π
Sen x					

Fonte: Acervo dos autores.

Após isso, juntamente com os alunos, a tabela foi completada, sempre analisando os valores no ciclo trigonométrico. Foram encontrados os valores da função seno para cada valor x descrito. Conforme os estagiários iam questionando os alunos, rapidamente eles iam respondendo, o que deu a impressão de que compreenderam com clareza como encontrar os valores de seno no ciclo trigonométrico. Por fim, a tabela ficou assim:

Tabela 11: Valores da função seno em 0, π/2, π, 3π/2 e 2 π.

X	0	π/2	Π	3π/2	2π

Sen x	0	1	0	-1	0

Fonte: Acervo dos autores.

Após isso, foi desenhada a função seno. Foi questionado aos alunos sobre qual era o comportamento dessa função e um aluno respondeu “a função seno é crescente nos intervalos [0, π/2] e [3π/2, 2π] e decrescente no intervalo [π/2, 3π/2]”. Os estagiários comentaram que a resposta do aluno estava correta e explicaram para os demais alunos, de modo que todos pudessem compreender. Ainda, foi questionado aos alunos sobre qual seria a imagem dessa função. Por um instante a sala se manteve em silêncio até que um aluno disse: “Não sei se está certo, mas seria entre 1 e -1?”. Os estagiários afirmaram que sim, que a imagem da função sex x é limitada ao intervalo [-1, 1]. Foi realizado o mesmo processo, para a função cos x.

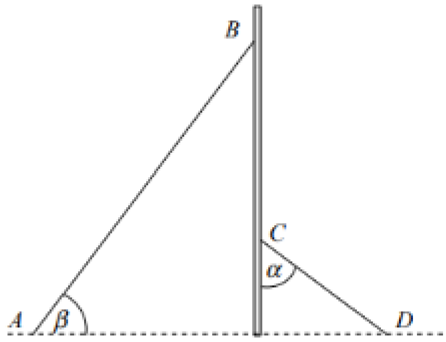
Após o trabalho com as funções seno e cosseno, considerando que já estava na hora do intervalo, os alunos foram liberados.

Após o intervalo, foi definida a função tangente e mostrada no ciclo trigonométrico alguns valores e o seu significado gráfico, conforme o gráfico presente no plano. O segmento $\overline{OP_3}$ é paralelo ao eixo das tangentes e, neste caso, não existe o ponto P_3 e, consequentemente, a tg x não é definida. Foram comentadas algumas propriedades da função. Foi frisado ainda que temos que os valores possíveis de x, é qualquer número real, com $x \neq \frac{\Pi}{2} + k\Pi$, o que define seu domínio. Continuando a aula, foi comentado sobre as características da função tangente de mesmo modo que foi realizado para a função seno e função cosseno.

Após, foi projetado no quadro os exercícios que haviam sido passados aos alunos na primeira aula e que abrangiam todo o conteúdo visto até então. Iniciou-se a resolução dos exercícios. Considerando que os alunos tiveram 15 dias para tentar resolver, os alunos não tiveram grandes dúvidas. Antes de resolver os exercícios, os alunos eram convidados a expressarem as suas ideias. Todos os alunos que as expuseram encontraram os caminhos corretos para a resolução, e este, foi o mesmo em todas as questões.

Um fato interessante a se mencionar, está relacionado sobre a seguinte questão:

(UNIOESTE - 2011) Um tubo é fixado verticalmente em uma superfície plana e, para sustentá-lo, alguns fios são presos a ele e esticados até o chão. Dois destes fios estão em lados opostos, conforme ilustra a figura a seguir. Um deles está fixado ao tubo no ponto B e o outro está fixado no ponto C.



O fio CD mede 5 metros, está fixado no chão a 4 metros do tubo (ponto D) e o ângulo que faz com o tubo tem medida α. O fio AB está no chão a 7 metros do tubo (ponto A) e faz com o chão um ângulo de medida β. Sabendo-se que α = β pode-se concluir que o fio AB mede:

a) 35/4 m.
b) 35/3 m.
c) 28/3 m.
d) 28/5 m.

Tanto os alunos que haviam expressado os caminhos seguidos para a resolução e os estagiários haviam resolvido ela através das relações de semelhança de triângulos. Porém, um aluno comentou que havia resolvido de outra forma. Então, os estagiários o convidaram para que viesse até o quadro e resolvesse da forma que havia pensado.

O aluno explicou que não havia pensado através da semelhança de triângulos, mas sim pelo “SOH CAH TOA”, um dos macetes que os estagiários passaram para os alunos para lembrarem as definições: $sen = {}^{CO}/_{H}$, $cos = {}^{CA}/_{H}$ $e\ tg = {}^{CO}/_{CA}$. Primeiro ele analisou que no triângulo retângulo formado pelo chão, pelo fio AB e pelo tubo continha apenas a medida da distância que o ponto A do fio estava o tubo e que este, era cateto adjacente ao ângulo dado. Portanto, para descobrir o comprimento do cabo AB (hipotenusa) teria de usar a definição que diz que $cos = {}^{CA}/_{H}$, obtendo: $\cos\beta = {}^{7}/_{H}$

Ainda, afirmou que $\alpha = \beta$, o $\cos\alpha = \cos\beta$. Portanto, analisou o triângulo formado pelo tudo, pelo chão e pelo cabo CD. Para encontrar o cos α, ele precisava da medida do cateto adjacente ao ângulo, que não estava dado no problema. Considerando que o enunciado da questão forneceu a medida dos outros dois lados do triângulo retângulo, ele utilizou Pitágoras para encontrar o terceiro lado:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 5^2 = 4^2 + c^2 \rightarrow 25 - 16 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{9} = 3$$

E com isso, encontrou que $\cos\alpha = {}^{3}/_{5}$. Como $\cos\alpha = \cos\beta$, ele igualou os valores encontrados e realizou a multiplicação cruzada:

$$\frac{7}{H} = \frac{3}{5} \rightarrow 3H = 35 \rightarrow H = \frac{35}{3}$$

Os estagiários parabenizaram o aluno e afirmaram que a resolução feita por ele estava correta e aproveitaram para lembrar os alunos que na matemática, na maioria das vezes, tem mais de um caminho possível a se seguir para chegar na resolução de exercícios e que, qualquer um deles pode estar correta. Considerando que já eram 11h40min, os alunos foram líberos e encerrou-se a aula.

Do conteúdo de trigonometria, que foi planejada para as três primeiras aulas não foi possível executar o planejado no plano três, considerando os atrasos nas aulas anteriores. Acredita-se que atraso do conteúdo não interfira em resultados futuros dos alunos, considerando que os alunos disseram na primeira aula que não estavam ali por conta de vestibular, mas porque queria ‘’aprender a matemática” de forma eficaz.

De todas as aulas até então, esta foi em que a organização do quadro esteve melhor. Foram escritas as definições, o passo a passo de todas as contas e não apenas falado verbalmente, conforme ocorreu na primeira aula. No decorrer da aula não ocorreram grandes imprevistos que contribuíssem para uma mudança drástica na execução. Conclui-se que a aula foi produtiva e satisfatória atendendo às expectativas.

4.4 Plano de aula 4 – Assíncrono.

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto PROMAT.

Conteúdo: Plano cartesiano e especificação de pontos em um sistema bidimensional, distância entre pontos.

Objetivo geral: Conhecer e compreender os conceitos básicos do sistema de coordenadas no plano cartesiano, bem como sua utilidade para a localização de pontos e figuras em um espaço bidimensional e cálculo da distância entre dois pontos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com plano cartesiano, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar e localizar pontos no plano cartesiano;
- Conhecer os componentes de um par ordenado, composto por abscissa e ordenada.
- Compreender o conceito de plano cartesiano;
- Compreender o conceito de sistema de coordenadas;
- Utilizar o teorema de Pitágoras;
- Compreender o conceito de distância entre pontos, ponto médio e pontos colineares.

Tempo de execução:

Uma videoaula de 30 minutos.

Recursos didáticos:

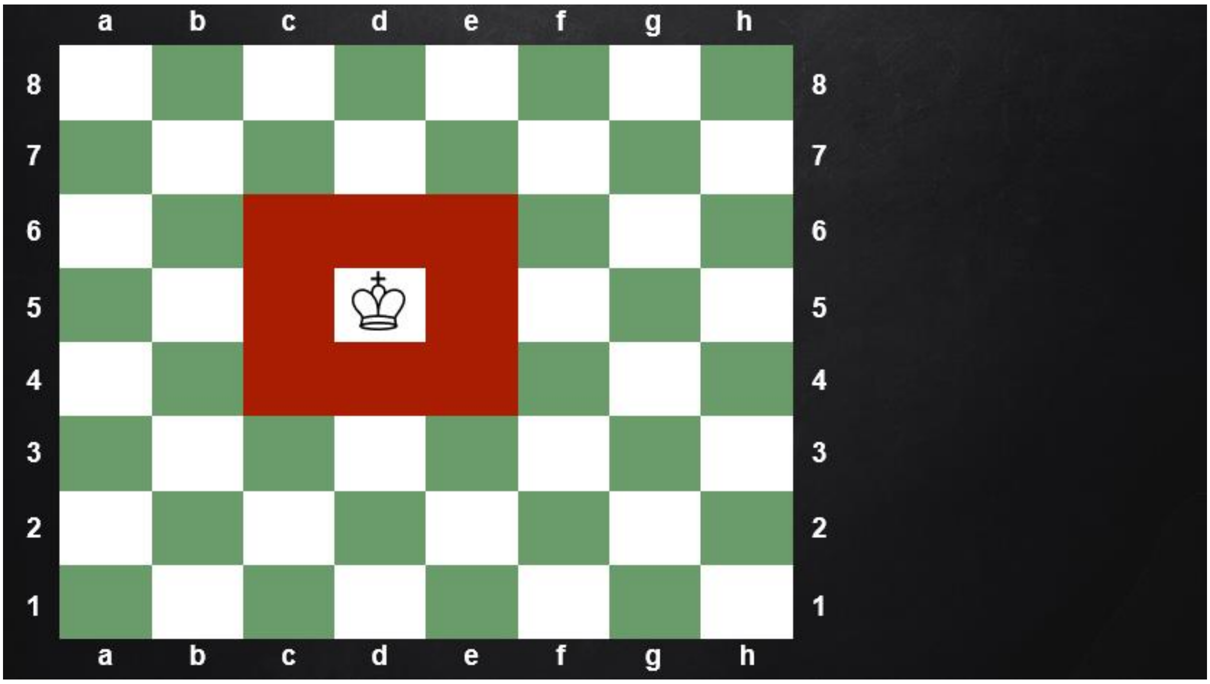
Software Microsoft PowerPoint.

Encaminhamento metodológico:

No primeiro momento será apresentada uma sequência de lâminas contendo alguns movimentos iniciais de partidas do jogo de xadrez e da batalha naval, conforme ilustram as Figuras de 1 a 10. Ao mesmo tempo em que serão apresentadas algumas jogadas, será explicado como o xadrez é jogado, suas regras, enfatizando as particularidades dos sistemas de coordenadas. Destacando o aspecto de ordenação na composição de uma coordenada

Para explicar as regras do jogo, serão utilizadas as seguintes Figuras.

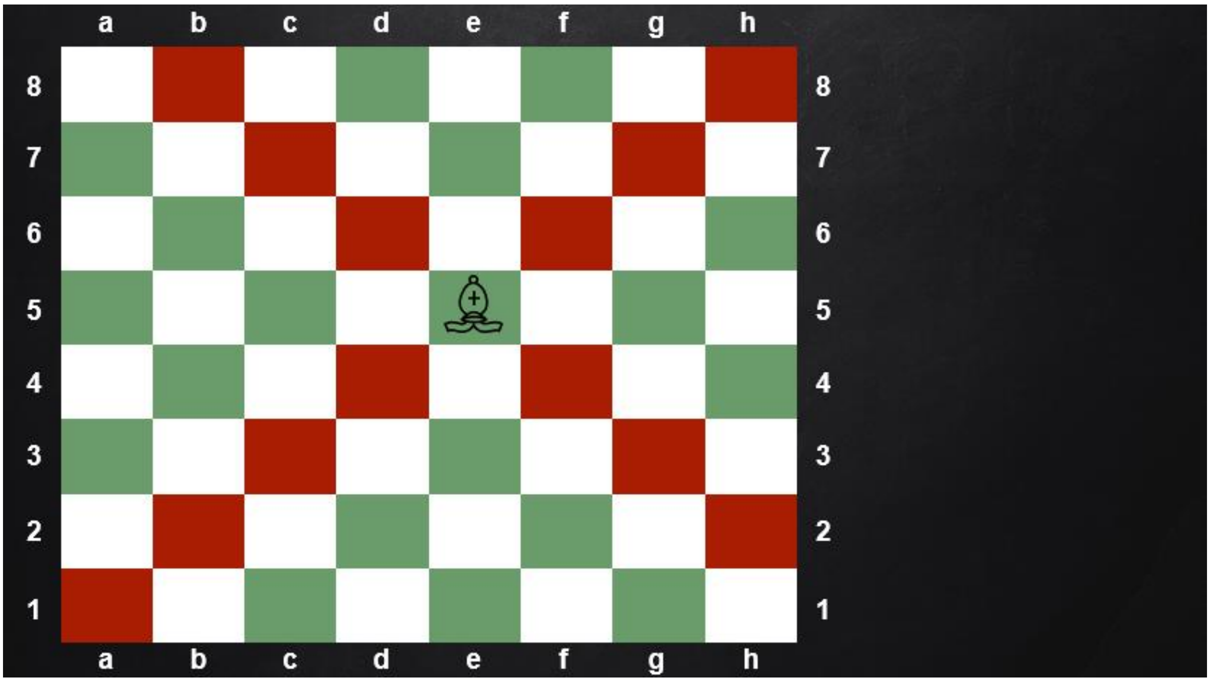
Figura 24: Movimento rei.



Fonte: Acervo dos autores

No jogo de xadrez, o rei, conforme ilustrado na Figura x, pode movimentar-se em todas as direções, mas apenas uma casa por vez.

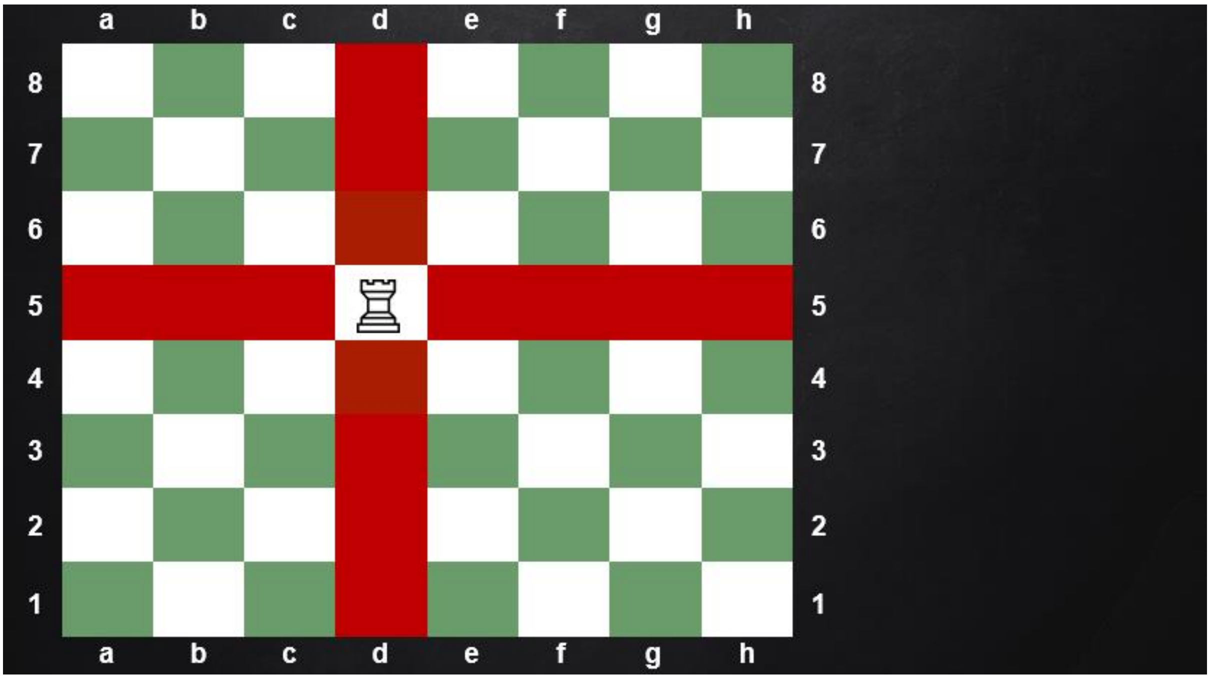
Figura 25: Movimento bispo.



Fonte: Acervo dos autores

O bispo, por sua vez, pode movimentar-se apenas em diagonal, assim, num jogo de xadrez, existe um bispo que anda nas diagonais brancas e outro que anda nas diagonais pretas.

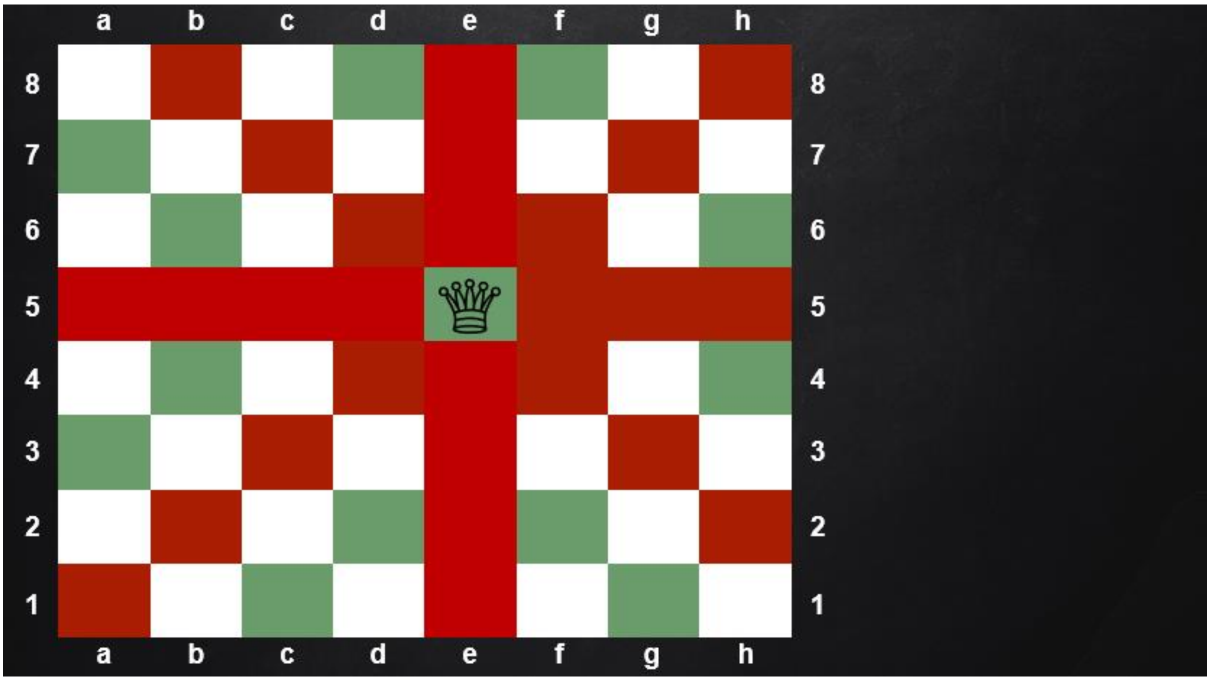
Figura 26: Movimento torre.



Fonte: Acervo dos autores

A torre tem movimento em forma de cruz, podendo se movimentar quantas casas forem possíveis nestas direções.

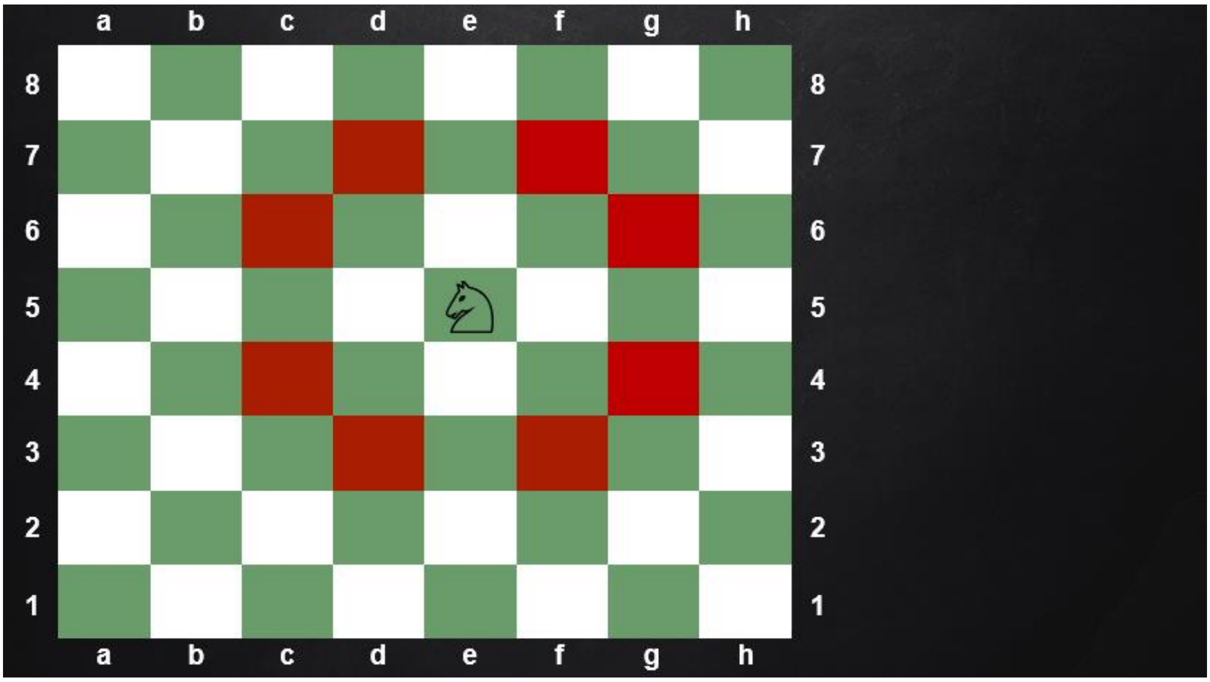
Figura 27: Movimento rainha.



Fonte: Acervo dos autores

A rainha pode se movimentar em qualquer direção e andar quantas casas forem possíveis, sendo uma das peças com maior mobilidade e valor no campo.

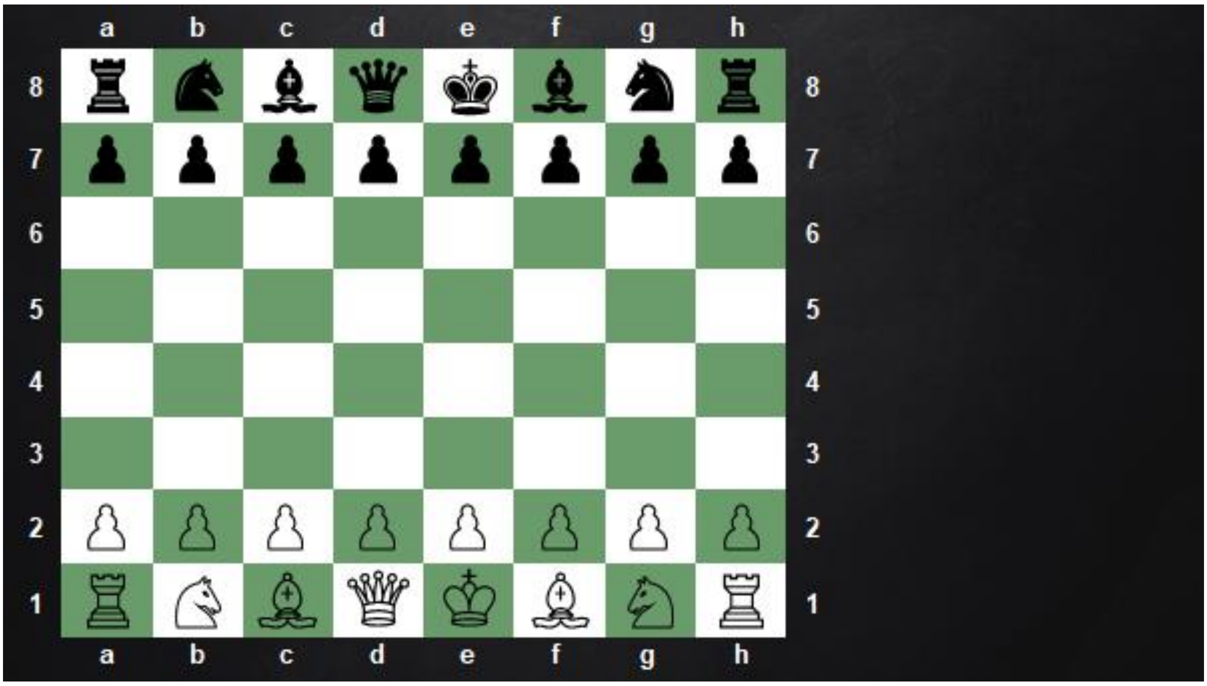
Figura 28: Movimento cavalo.



Fonte: Acervo dos autores

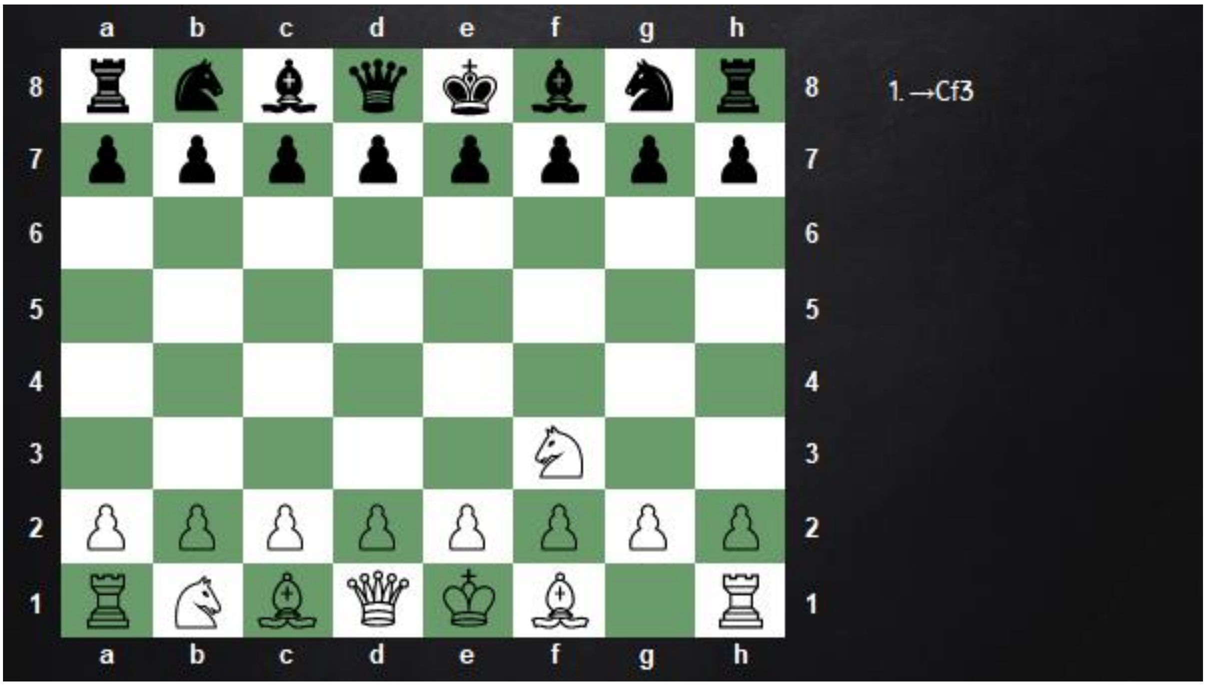
O cavalo move-se em formato de L, e “pula” as casas, permitindo estratégias mais flexíveis. Após isso, será simulado as seguintes jogadas no tabuleiro.

Figura 29: Tabuleiro de xadrez.



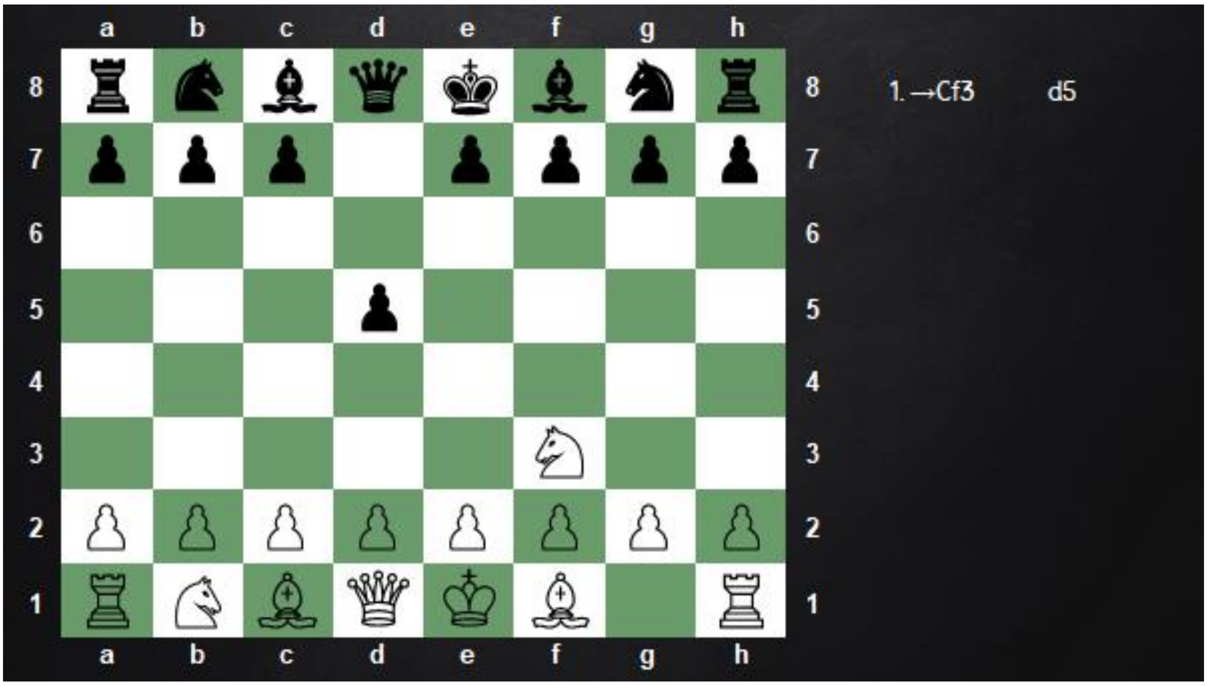
Fonte: Acervo dos autores

Figura 30: Movimento cf3 (1º Movimento).



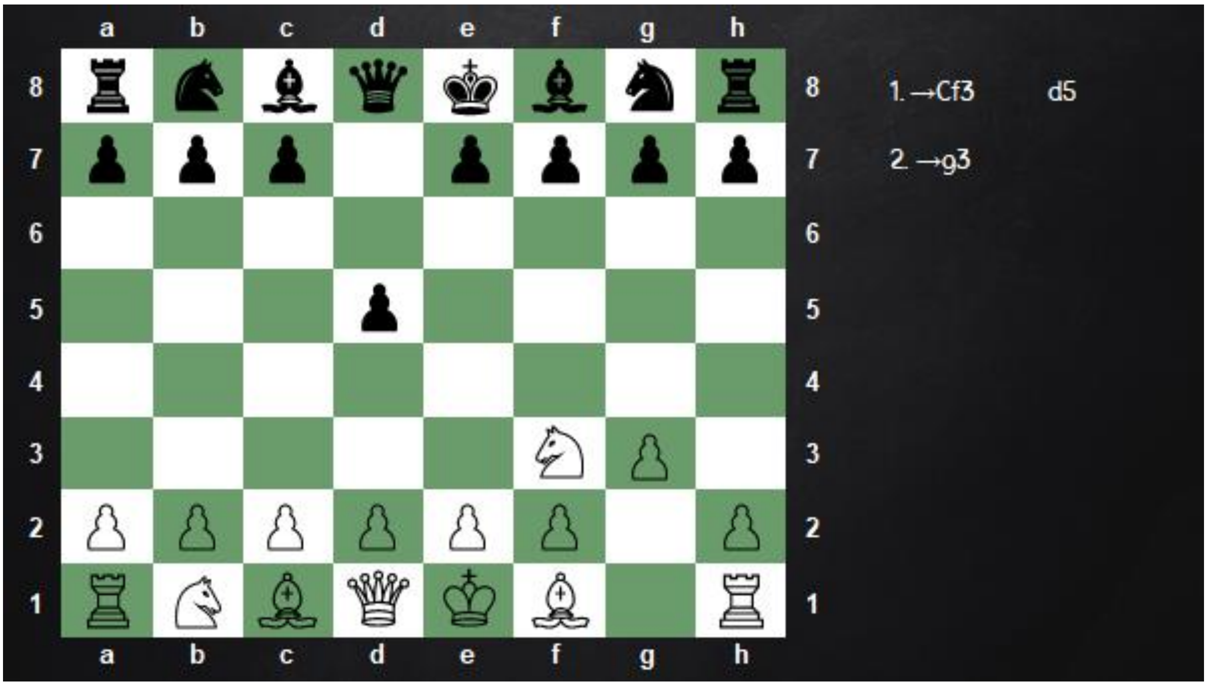
Fonte: Acervo dos autores

Figura 31: Movimento d5 (2º Movimento).



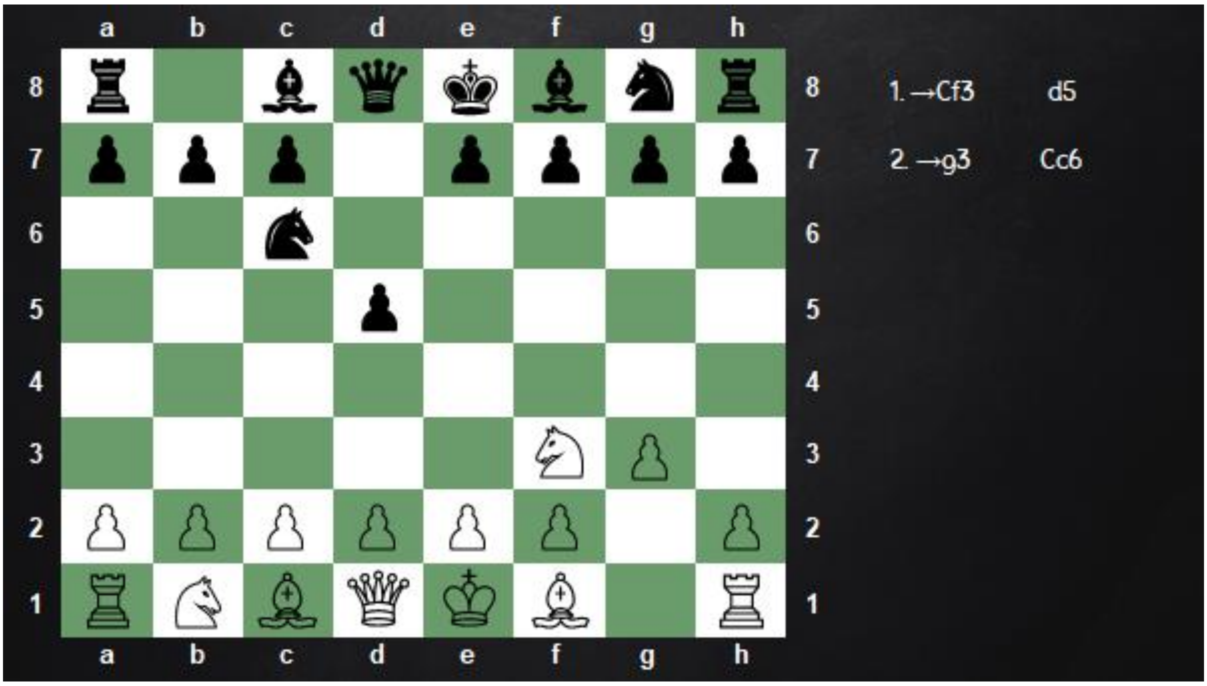
Fonte: Acervo dos autores.

Figura 32: Movimento g3 (3º Movimento).



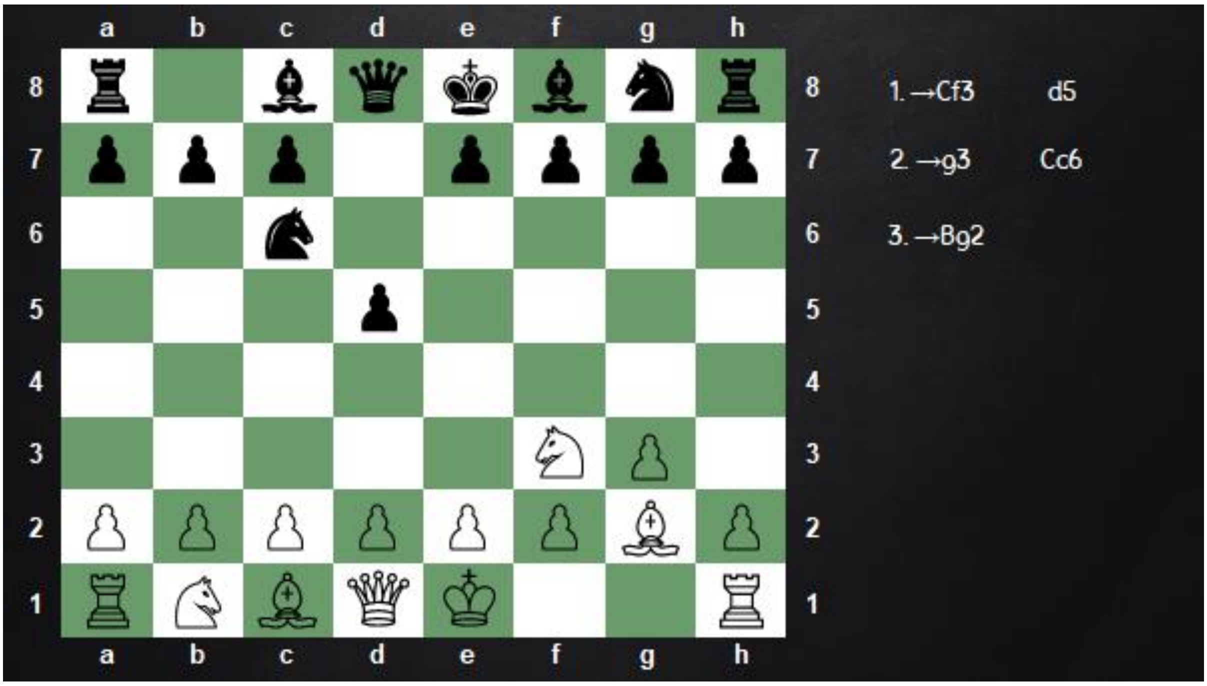
Fonte: Acervo dos autores

Figura 33: Movimento cc6 (4º Movimento).



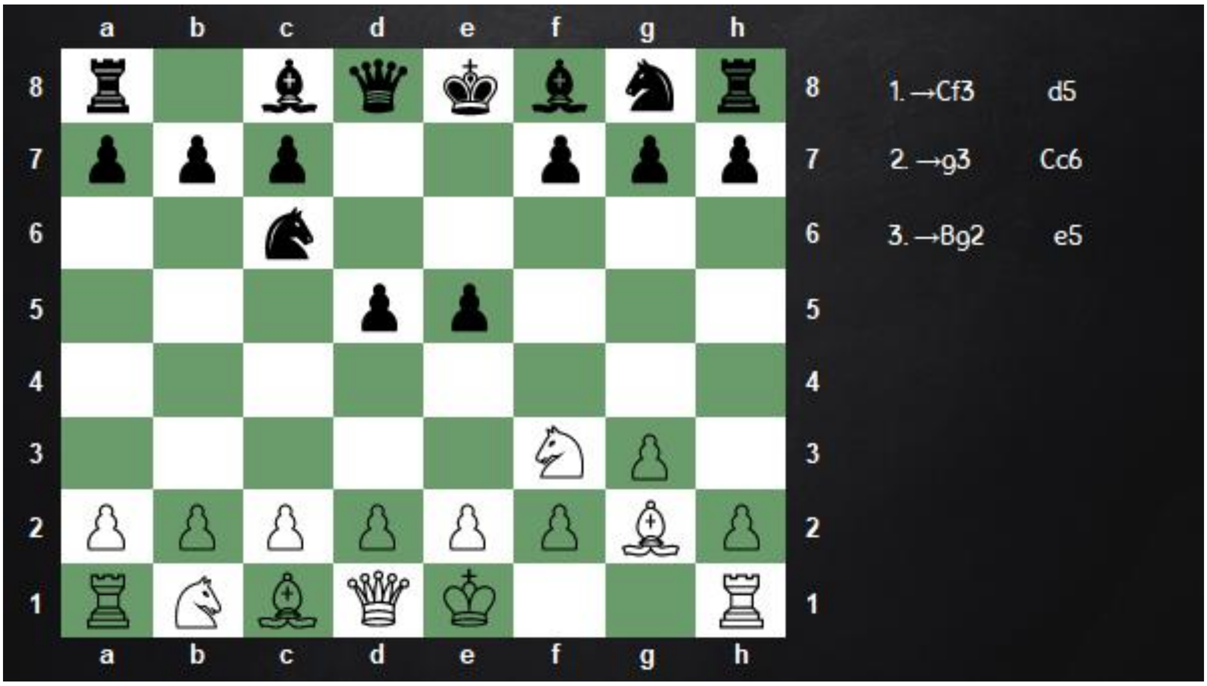
Fonte: Acervo dos autores

Figura 34: Movimento bg2 (5º Movimento).



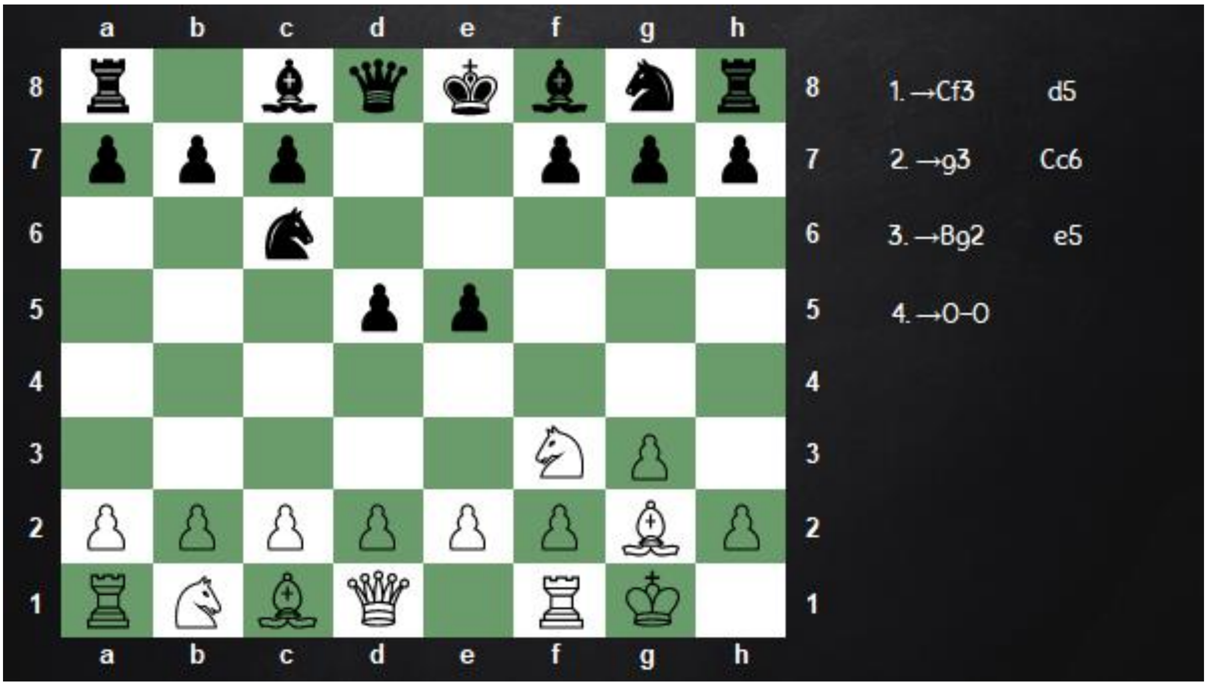
Fonte: Acervo dos autores

Figura 35: Movimento e5 (6º Movimento).



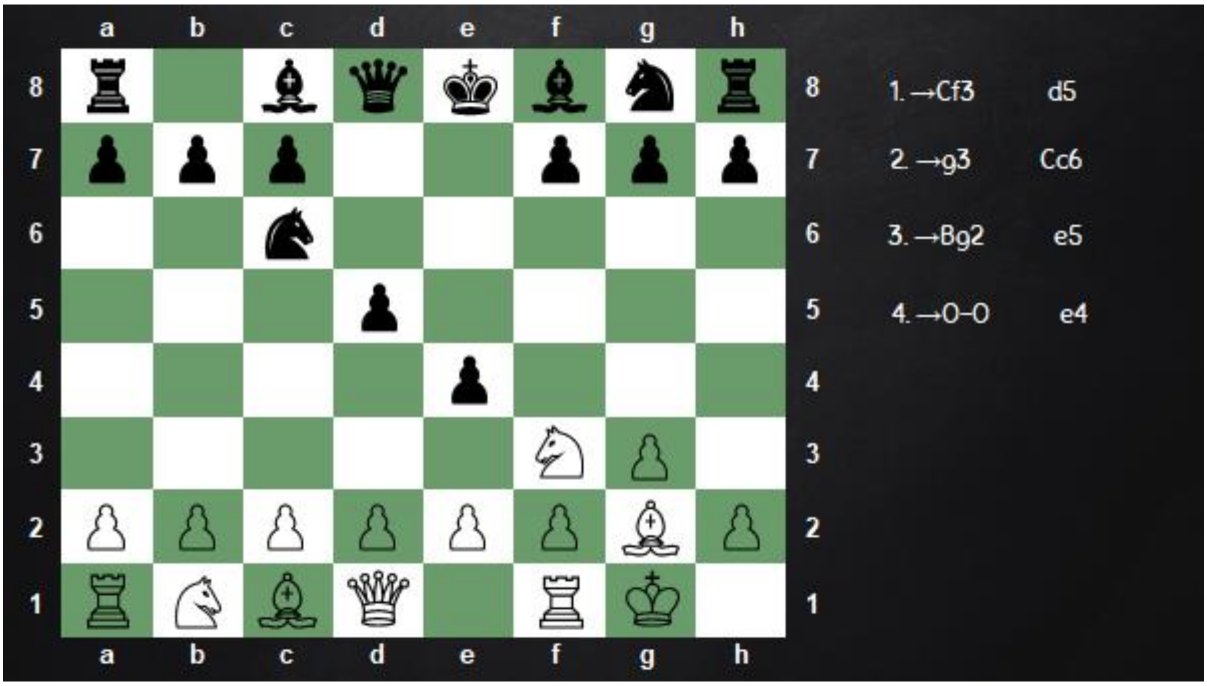
Fonte: Acervo dos autores.

Figura 36: Movimento 0-0 (7º Movimento).



Fonte: Acervo dos autores

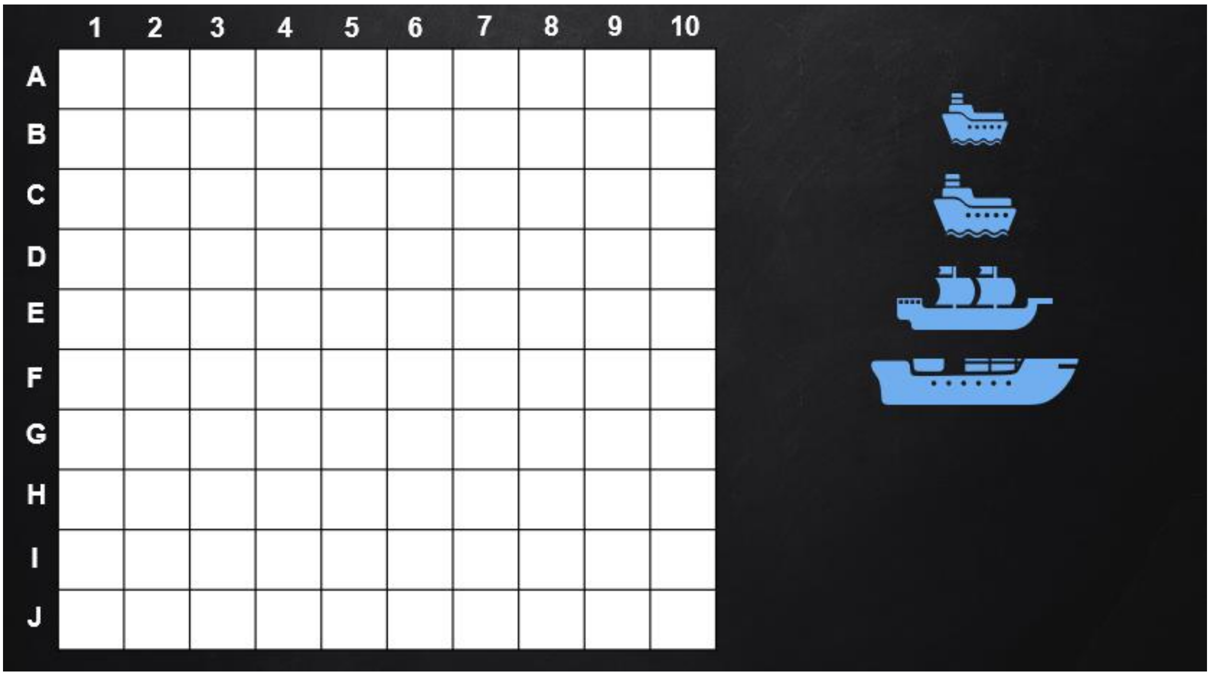
Figura 37: Movimento e4 (8º Movimento).



Fonte: Acervo dos autores

Após isso, será mostrado o tabuleiro de batalha naval, como representado na Figura x, sendo explicadas as regras e o objetivo do jogo, que consiste em colocar os barcos na vertical, horizontal, em quaisquer casas do tabuleiro, e, durante o jogo, falar coordenadas, abscissa e ordenada a serem "bombardeadas" e, assim, tentar afundar todos os navios do oponente. Ganha a partida o primeiro a afundar todos os navios inimigos.

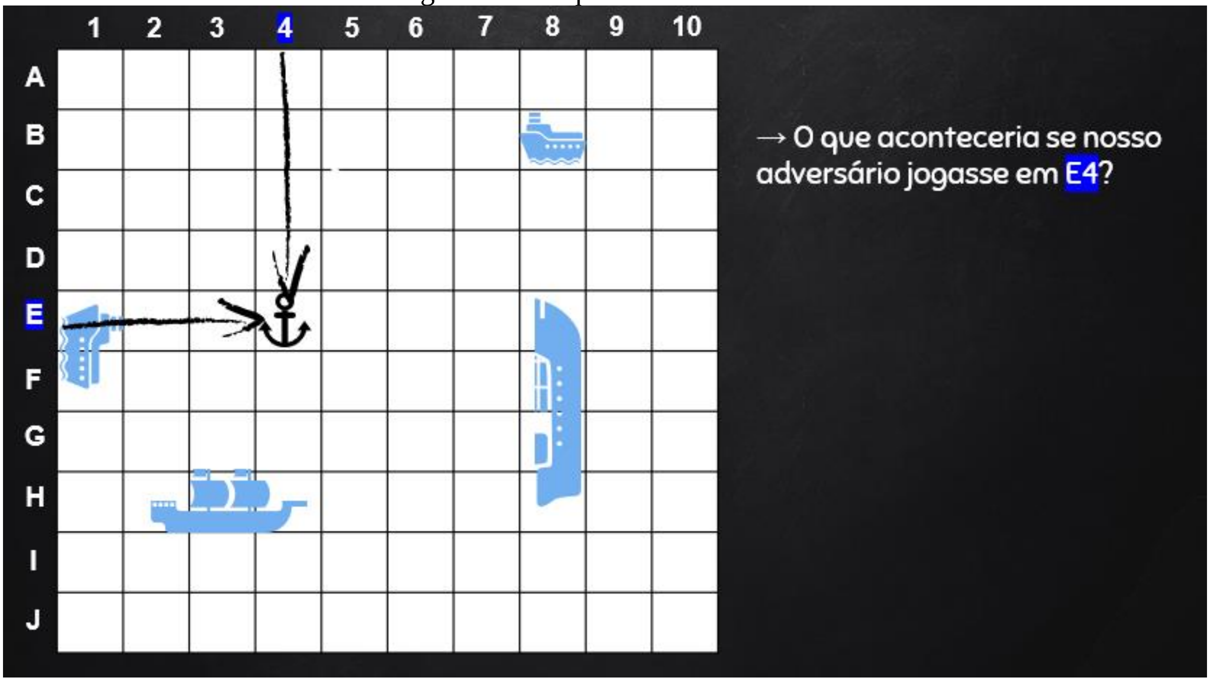
Figura 38: Tabuleiro de batalha naval.



Fonte: Acervo dos autores

Após a explicação da batalha naval, os espectadores serão indagados com a seguinte pergunta: “O que aconteceria se nosso adversário jogasse em E4?”. Em sequência será localizado no tabuleiro a casa E4, como ilustra a Figura abaixo.

Figura 39: Ataque da batalha naval.



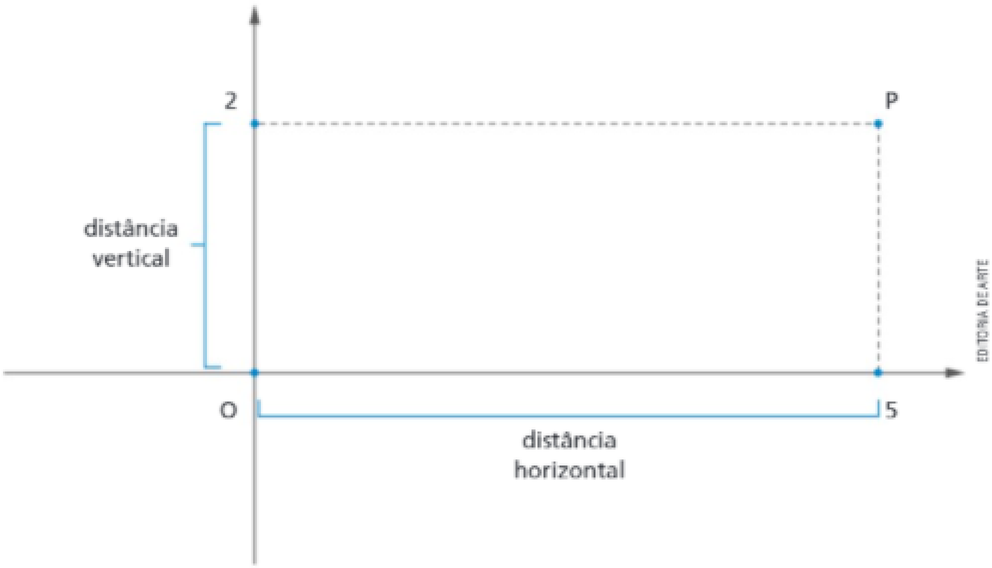
Fonte: Acervo dos autores

Após isso, serão lançadas as seguintes indagações: "Há alguma semelhança entre os jogos? Há alguma característica comum entre os jogos?”. Como trata-se de uma aula gravada, responderemos que os sistemas de coordenadas dos jogos são semelhantes. Durante esse momento, será definido informalmente, com base na definição de plano cartesiano, os conceitos de plano cartesiano e plotagem de pontos, com a intenção de que, primeiramente, o conteúdo seja compreendido e, com isso, facilite o entendimento do conceito formal dos conteúdos com base na definição abaixo.

Uma das diversas formas de representação de coordenadas foi proposta pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), em um trabalho publicado em 1637.

Descartes mostrou que, usando como referência um par de retas que se interceptam e formam um ângulo de 90° entre si, seria possível construir um sistema no qual números poderiam estar associados a pontos, assim como representado na imagem x.

Figura 40: O Plano Cartesiano.



Fonte: JÚNIOR, José; CASTRUCCI, Benedicto. A Conquista da Matemática (2018)

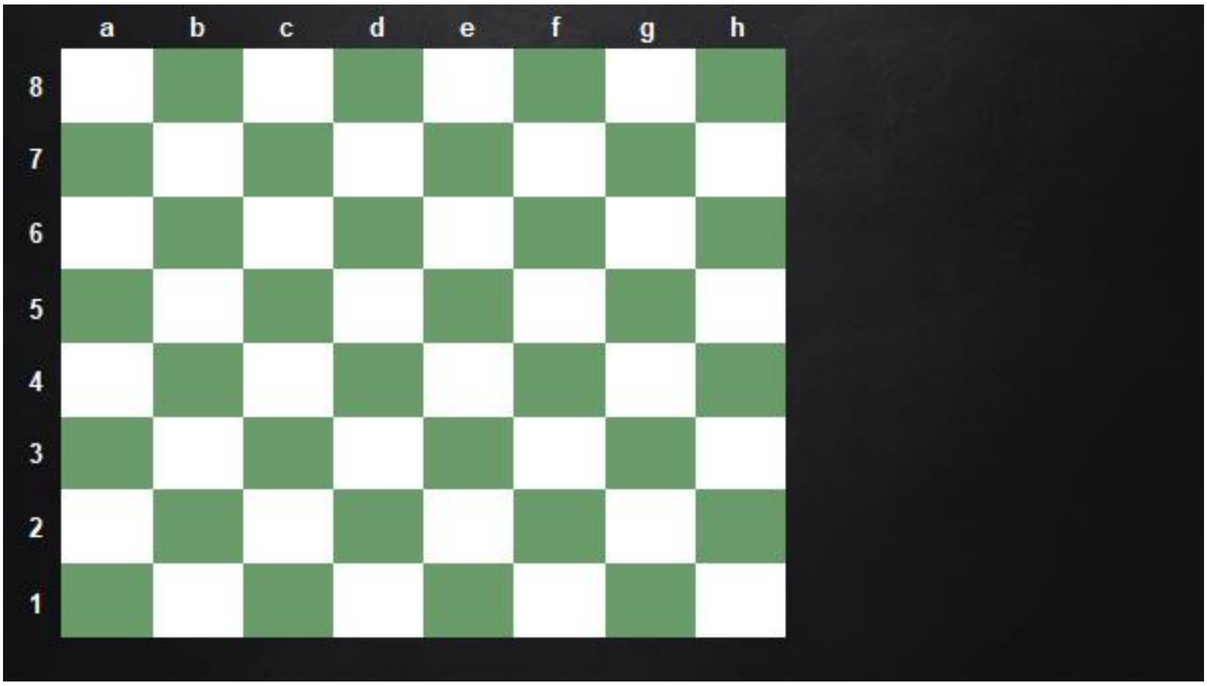
No exemplo acima, por exemplo, em relação ao ponto O, que representa a intersecção das duas retas, o ponto P possui uma distância horizontal de 5 unidades e uma distância vertical de 2 unidades. Para indicar a posição do ponto P, usamos o par de números (5,2), enquanto o ponto O é indicado pelo par de números (0,0).

A essa representação damos o nome de sistema, ou plano, cartesiano.

Os pares de números (x, y), com $x, y \in \mathbb{R}$ são chamados pares ordenados, pois, são convencionados uma ordem para escrever seus números, sendo, obrigatoriamente, em primeiro lugar o número do eixo x, chamado de eixo das abcissas, e em seguida, o número do eixo y, chamado de eixo das ordenadas.

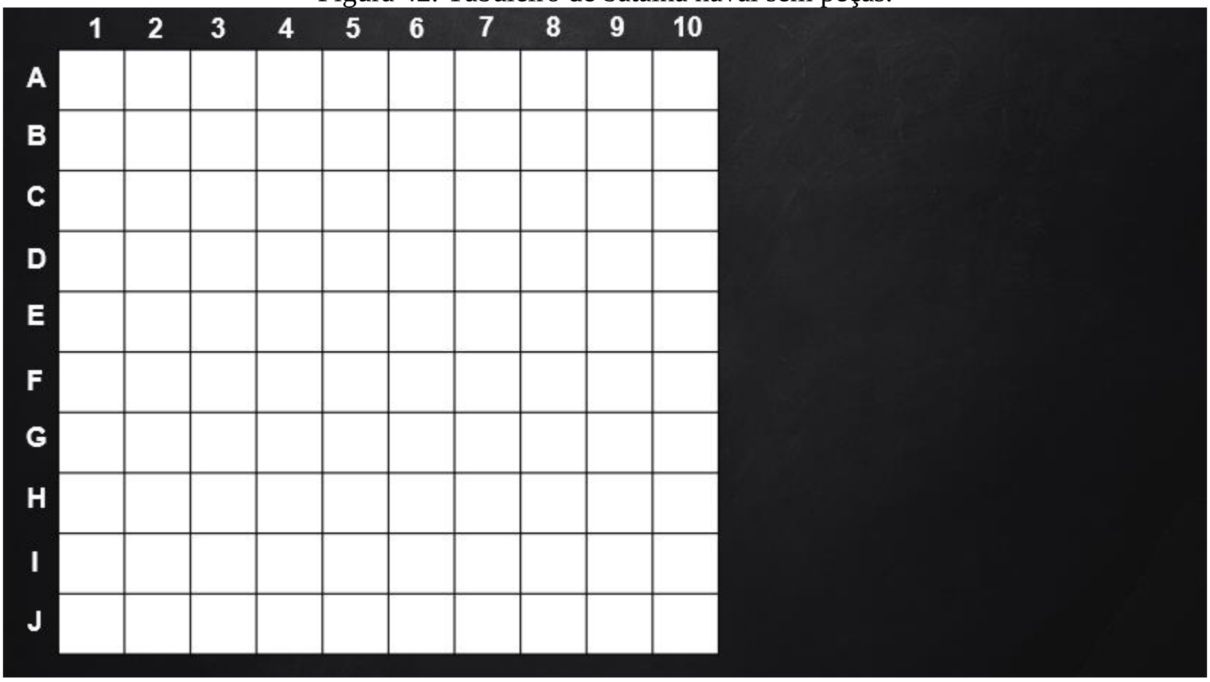
Para ajudar na visualização, será mostrado ambos os tabuleiros sem as peças, enfatizando que o próprio tabuleiro pode ser visualizado como parte de um sistema de coordenadas (conforme mostra as Figuras x e x).

Figura 41: Tabuleiro de xadrez sem peças.



Fonte: Acervo dos autores

Figura 42: Tabuleiro de batalha naval sem peças.



Fonte: Acervo dos autores

Nesse momento, será dada ênfase às diferenças presentes entre o plano cartesiano e o sistema de coordenadas dos jogos apresentados, sendo que o tabuleiro do jogo pode ser considerado como uma restrição do plano cartesiano. Uma das restrições diz respeito aos conjuntos finitos, alfabético e numérico, ao qual o tabuleiro do jogo se restringe sendo que no plano cartesiano, as abscissas e ordenadas podem se estender a todos os números reais. Outra diferença é que, nos jogos, cada coordenada representa um espaço retangular no tabuleiro, enquanto o sistema de coordenadas cartesiano corresponde a pontos específicos no plano, que não possuem área. Também será comentado sobre a não utilização de números negativos e da limitação de coordenadas possíveis no tabuleiro dos jogos, fato que não ocorre no plano cartesiano.

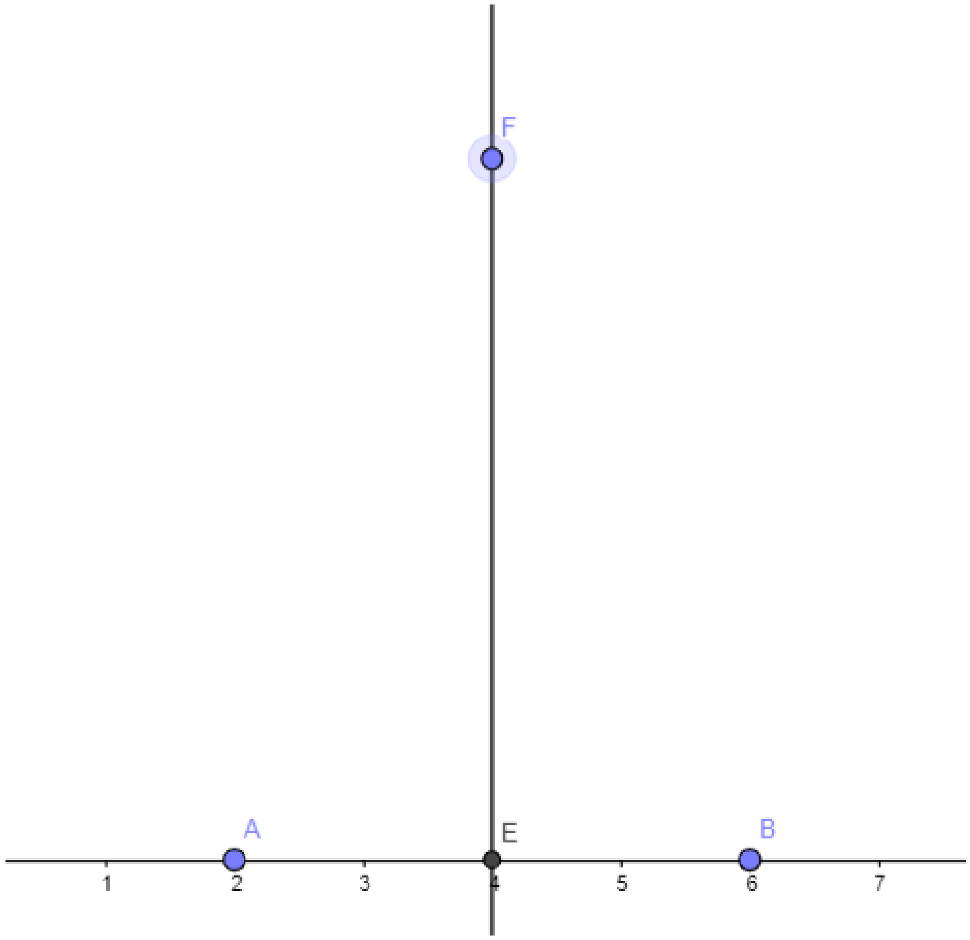
COMENTÁRIOS DOS AUTORES:

Como inicialmente será comentado sobre jogos de tabuleiro, os alunos começarão a perceber a presença da Matemática, tais como os possíveis sistemas de coordenadas, em elementos cotidianos, tais como nosso próprio sistema de visão, que é composto por um plano 3D, e a tela dos smartphone, que utilizam sistemas de coordenadas para localizar onde foi clicado, despertando interesse para o conteúdo.

No segundo momento, será apresentado uma questão do ENEM, a qual aborda a localização no plano.

Para a resolução desta questão será utilizada a ideia de pontos equidistantes, ou seja, dados três pontos A, B e C, com a distância $\overline{AB} = \overline{BC}$, então a distância entre o ponto A e o ponto C é igual à distância do ponto B ao ponto C. Assim, dizemos que os pontos A e B são equidistantes do ponto C. Dessa forma, será evidenciado tal conceito com base na Figura x, de forma a favorecer a compreensão do conteúdo.

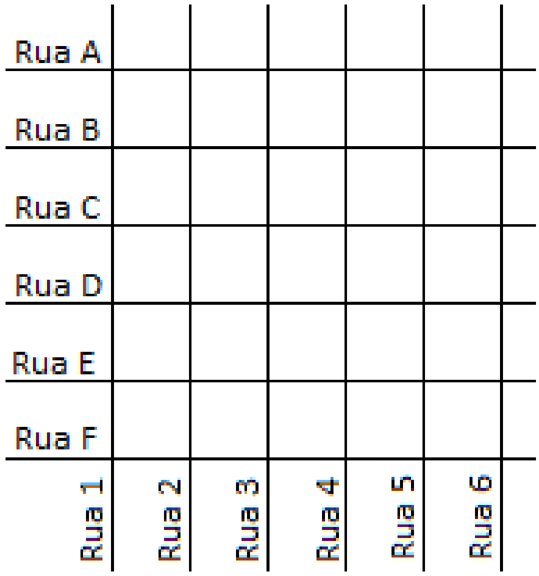
Figura 43: Pontos equidistantes.



Fonte: Acervo dos autores

01- (ENEM 2016 - Adaptado) - Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na Figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas indicadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal.

A família pretende que esse imóvel esteja localizado à mesma distância do local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E; do consultório do pai, localizado na rua 2 com a rua E; e a escola das crianças, localizado na rua 4 com a rua A. Assim, deseja-se que a localização deste imóvel seja equidistante ao trabalho da mãe, ao consultório do pai e à escola. Com base nesses dados, o imóvel que atende às pretensões da família deverá ser localizado no encontro de quais ruas?



Resolução:

Como o local de trabalho da mãe e o consultório do pai se localizam na rua E, o imóvel deverá ser localizado na rua 4, que é a mediatriz dos pontos correspondentes e deixa os caminhos com a mesma distância por simetria. A distância do consultório até a escola é de 6 quarteirões, logo o imóvel deverá ser localizado a 3 quarteirões de cada. Se partirmos da escola e andarmos 3 quarteirões na rua 4, chegaremos na rua D. Por isso, o imóvel deverá ser localizado no encontro das ruas 4 e D.

COMENTÁRIOS DOS AUTORES:

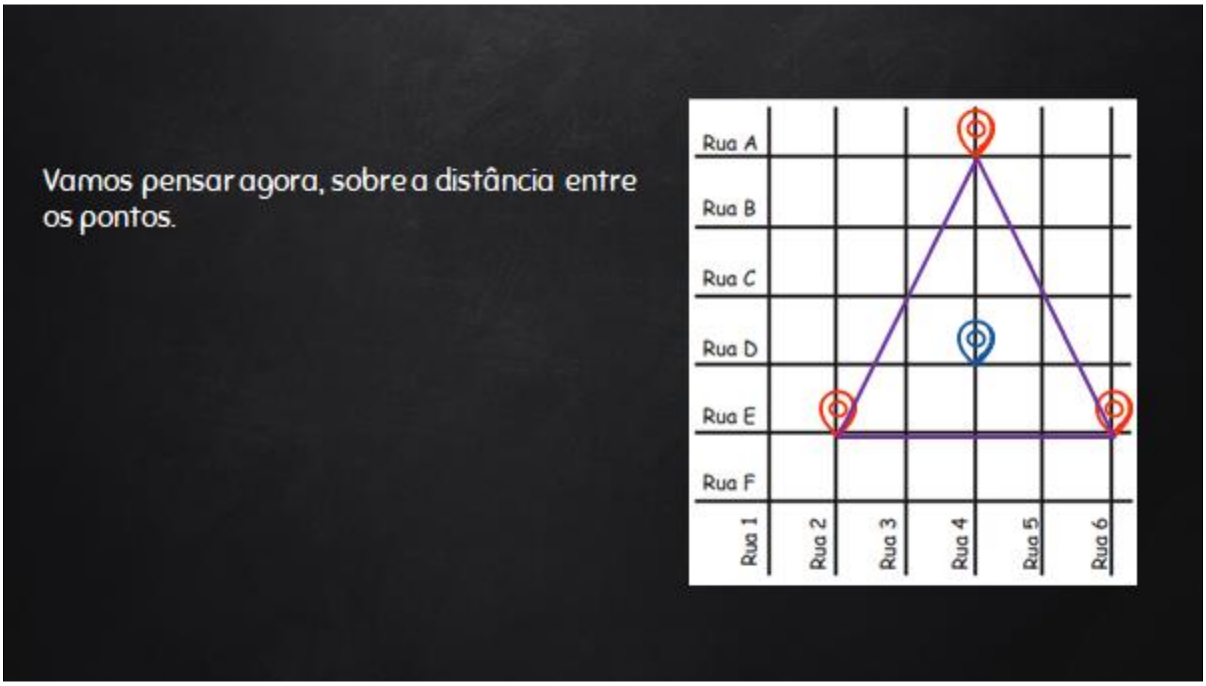
Esse problema foi escolhido por envolver a representação de pontos em um sistema de coordenadas e ser um problema com enunciado claro, objetivo e contextualização que se assemelha a situações vivenciadas no dia a dia.

Na sequência questionaremos: “Será que ao plotar pontos no plano cartesiano, a ordem das coordenadas do ponto importa?”

Para exemplificar a importância do valor das coordenadas dos pontos, em um plano cartesiano será plotado o ponto (1,3) e o ponto (3,1) exemplificando como a ordem da disposição dos elementos, representados, de forma geral, por x e y, sendo x o valor no eixo das abcissas e y o valor no eixo da ordenadas, importam. Em seguida, será explicado que, justamente por isso, o nome dado a uma coordenada é par ordenado.

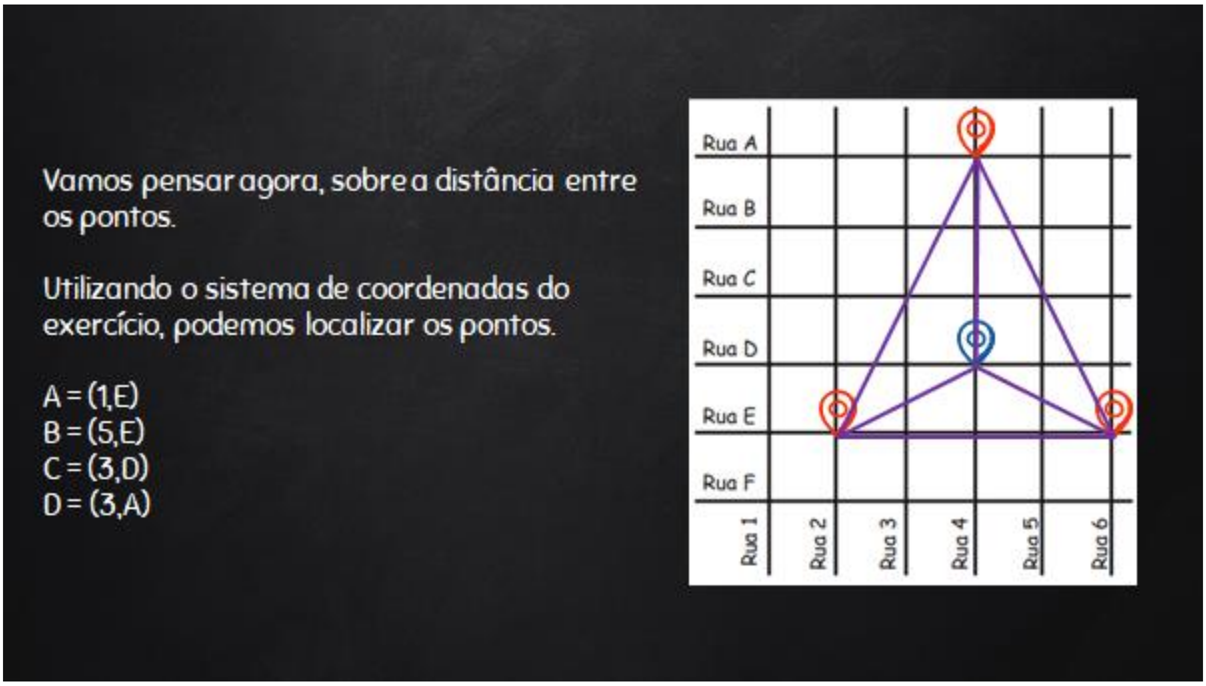
Outra questão a ser lançada: “Qual a distância entre os pontos anteriores, se pudéssemos desconsiderarmos as limitações físicas?". Para isso, as Figuras de 17 a 21 serão utilizadas como referência para a construção das distâncias entre os pontos e para alterações no sistema de coordenada original para adequá-lo ao plano cartesiano.

Figura 44: Representação de pontos no mapa.



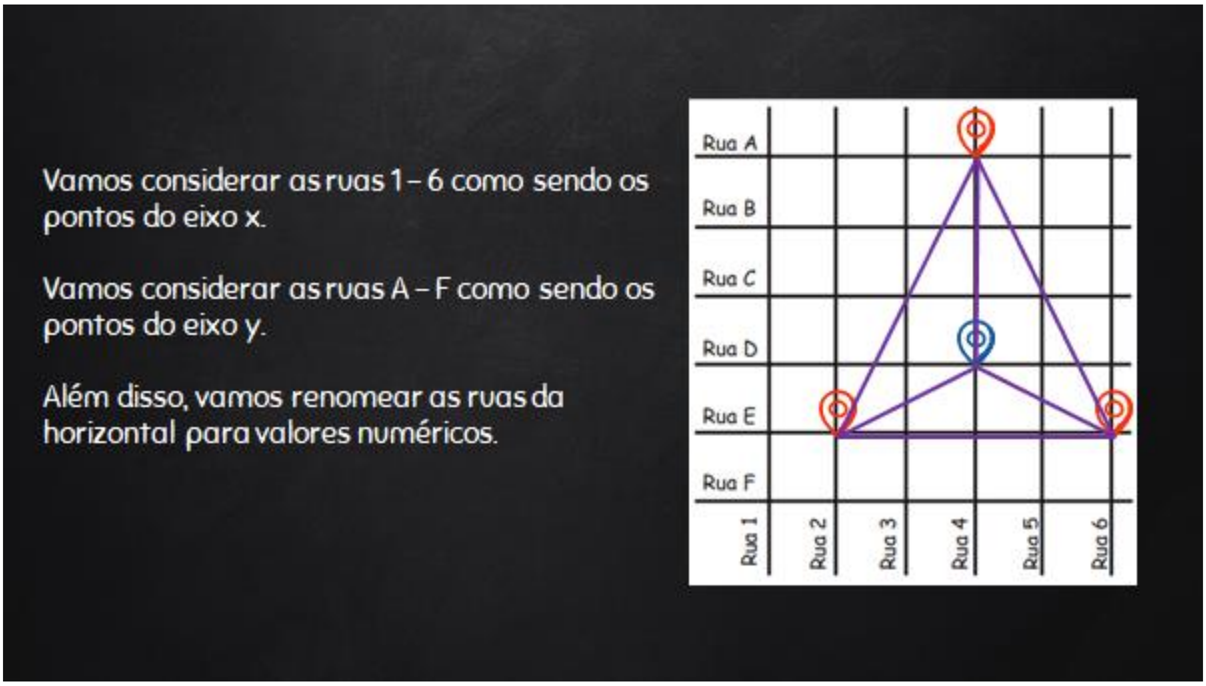
Fonte: Acervo dos autores

Figura 45: Nomenclatura dos pontos no sistema de coordenadas.



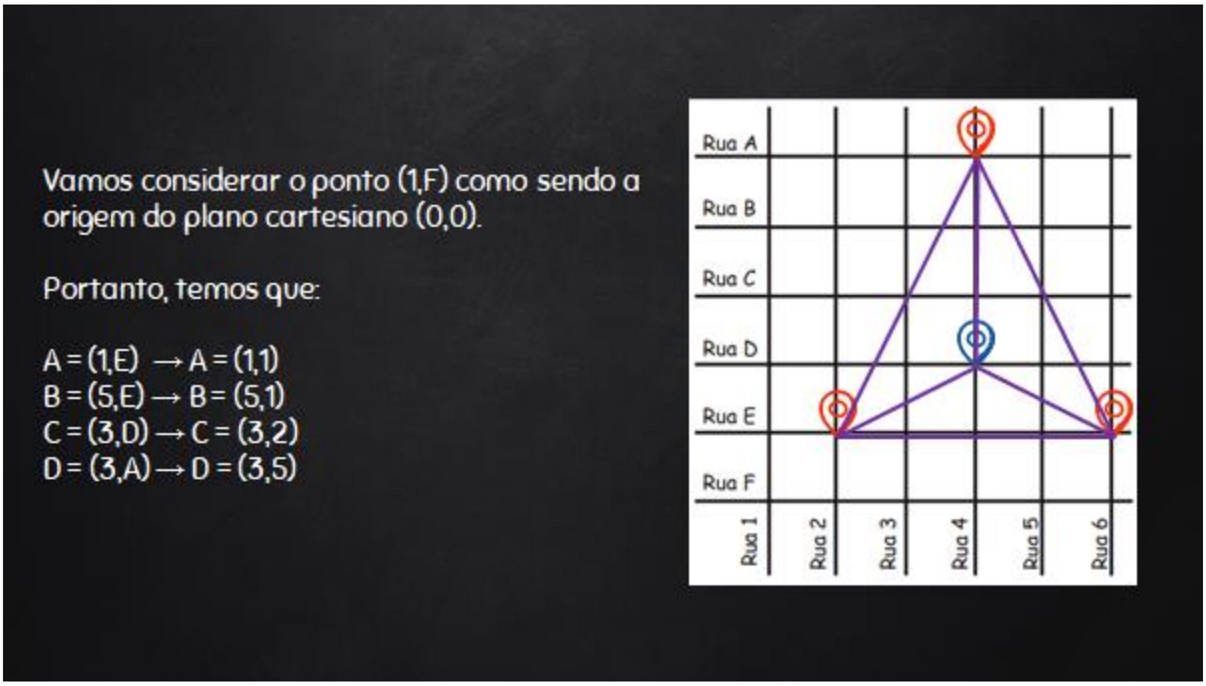
Fonte: Acervo dos autores

Figura 46: Correlação entre as ruas e o plano cartesiano.



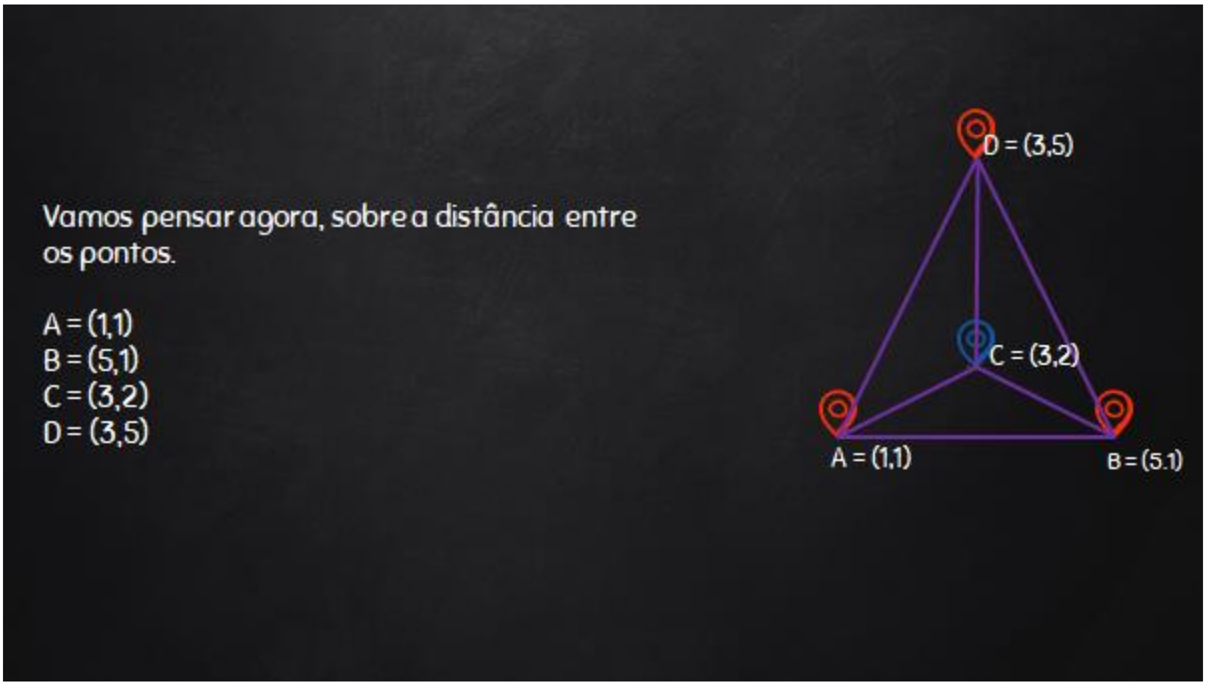
Fonte: Acervo dos autores

Figura 47: Transformação do sistema de coordenadas.



Fonte: Acervo dos autores

Figura 48: Representação dos pontos A, B, C e D no triângulo.



Fonte: Acervo dos autores

COMENTÁRIOS DOS AUTORES:

Tal exercício foi utilizado pois foi possível trabalhar, utilizando conteúdos anteriores, com um novo conceito de distância entre pontos, permitindo que os alunos construam tal concepção baseando-se em conhecimentos, e exercícios, anteriores. Além disso, acredita-se

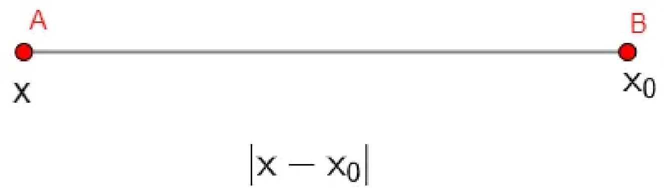
que com este exercício os alunos serão capazes de deduzir a fórmula para distância entre pontos quaisquer.

Em seguida serão lançadas as seguintes perguntas: "Agora que sabemos como identificar e localizar os pontos no plano cartesiano podemos calcular a distância entre os pontos A = (1,1) e C = (3,2). Qual é a distância entre eles? Como realizamos esse cálculo?" Observando que o ponto A se refere ao consultório do pai e o ponto C à casa será questionado: "Como podemos calcular a distância linear entre o consultório do pai e a casa? Atente-se que queremos a distância em linha reta, não por quadras."

Utilizando o problema acima, será salientado que caso os pontos sejam colineares, em alguma linha paralela aos eixos x e y, é possível calcular a distância entre tais pontos utilizando sua amplitude, caso contrário, é necessário utilizar outros métodos para obter tal medida. Para isso, os alunos serão questionados sobre como calcular tal distância, espera-se que tenham dúvidas sobre tal conceito e, após isso, será introduzido o conceito de distância entre dois pontos por meio da definição que segue.

A distância entre os dois pontos depende do lugar geométrico em que esses pontos estão localizados. Por exemplo, se dois pontos estão em uma reta, a distância é dada pelo módulo da diferença entre eles, veja:

Figura 49: Distância entre dois pontos.



Fonte: LUIZ, R. "Distância entre dois pontos"; Brasil Escola

Imagine a seguinte situação: em uma viagem, quando estamos passando por uma rodovia, temos algumas placas que marcam o quilômetro ou posição em que estamos naquele instante. Em um instante inicial passamos pela placa km 12, em seguida passamos pela placa km 68.

Para sabermos quanto andamos, é preciso considerar as duas placas: a do km 12 e a do km 68. Desse modo calculamos o módulo da diferença entre esses dois pontos para obtermos a distância percorrida, assim:

$$|12 - 68| =$$

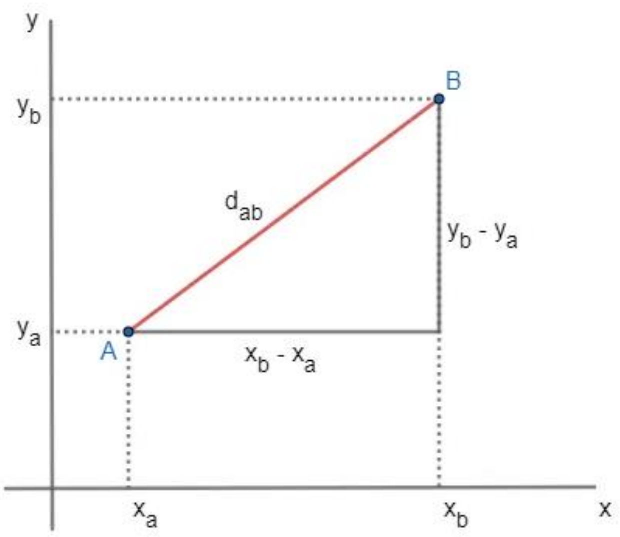
$$|68 - 12| =$$

$$56 \text{ km}$$

Distância entre dois pontos no plano cartesiano:

Para determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano, é necessário realizar a análise tanto no sentido do eixo das abscissas (x) quanto no do eixo das ordenadas (y). Confira:

Figura 50: Distância entre dois pontos no plano cartesiano.

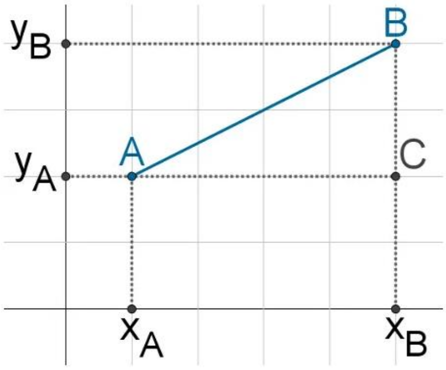


Fonte: LUIZ, R. "Distância entre dois pontos"; Brasil Escola

Note que na distância entre o ponto A e B existe uma variação tanto no eixo x quanto no eixo y, logo, a distância entre os pontos deve ser dada em função dessas variações.

Veja também que a distância entre os pontos é a hipotenusa do triângulo formado. Além disso, aplicando o teorema de Pitágoras e isolando o lado d_{AB}, temos:

Figura 51: Distância entre dois pontos quaisquer.



Fonte: LUIZ, R. "Distância entre dois pontos"; Brasil Escola

Logo, a distância entre os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ é definida pelo comprimento do segmento representado por d_{ab} e tem medida dada por:

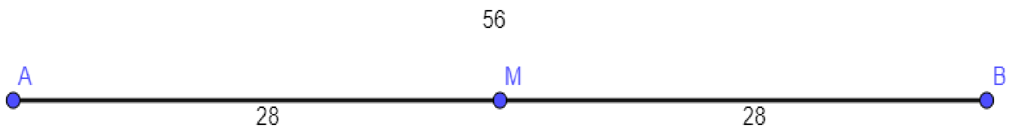
$$d_{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Por fim, será definido formalmente o conceito de ponto médio em um segmento e pontos colineares.

Ponto médio em um seguimento:

O ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ é o ponto, representado por M, em que $\overline{AM} = \overline{MB}$, de forma que, obrigatoriamente, M seja um ponto pertencente ao segmento $\overline{AB}$. De forma geral, podemos encontrar a medida dos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$, dividindo o valor de $\overline{AB}$ por dois, assim, com base no exemplo previamente trabalhado, temos que a medida do segmento $\overline{AB} = 56km$, logo, a medida $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{56}{2} = 28\ km$, consequentemente, temos que o ponto M deve estar a 28 km do ponto A e 28 km do ponto B, assim, a posição do ponto M no segmento $\overline{AB}$ será:

Figura 52: Ponto médio entre pontos a e b.

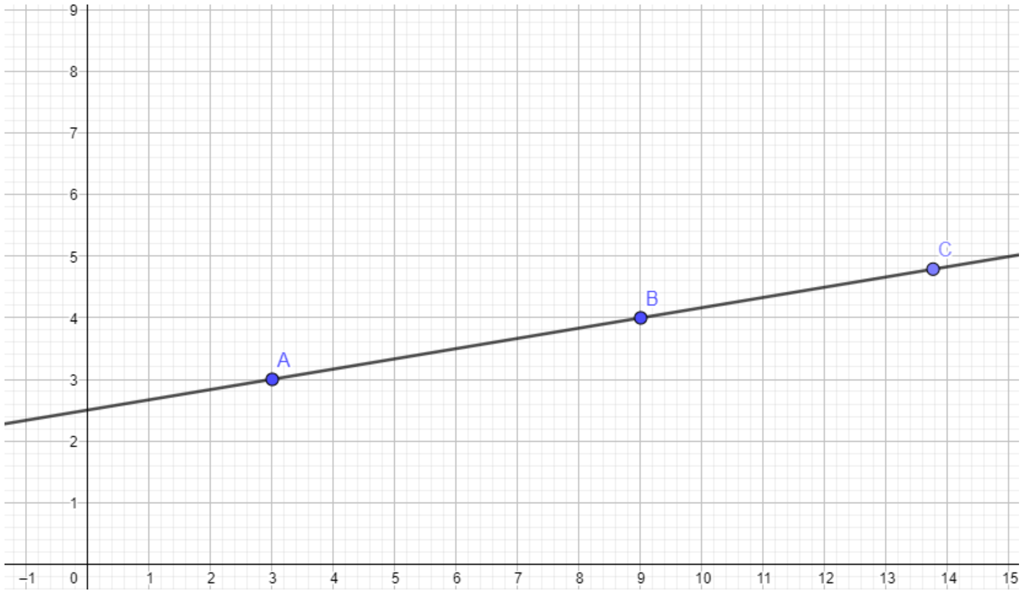


Fonte: Acervo dos autores

Pontos Colineares:

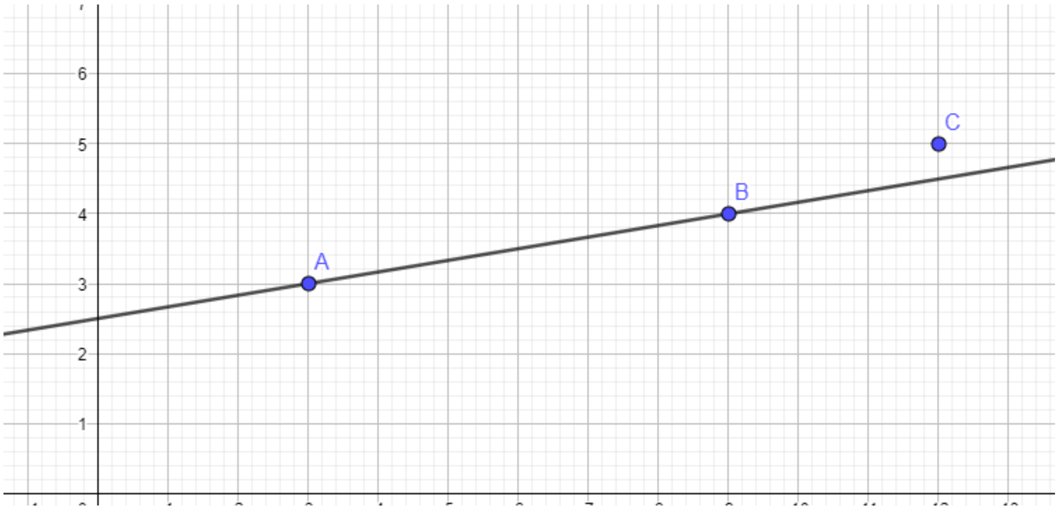
Dados três, ou mais, pontos A, B e C, chama-se tais pontos de colineares, se, é possível traçar uma reta *r* qualquer, de forma que A, B e C sejam pontos dessa reta, caso contrário, tais pontos não são colineares. Por exemplo, na primeira imagem abaixo, temos que os pontos A, B e C são colineares, enquanto na segunda imagem C não pertence à reta traçada.

Figura 53: Pontos colineares.



Fonte: Acervo dos autores

Figura 54: Pontos não colineares.



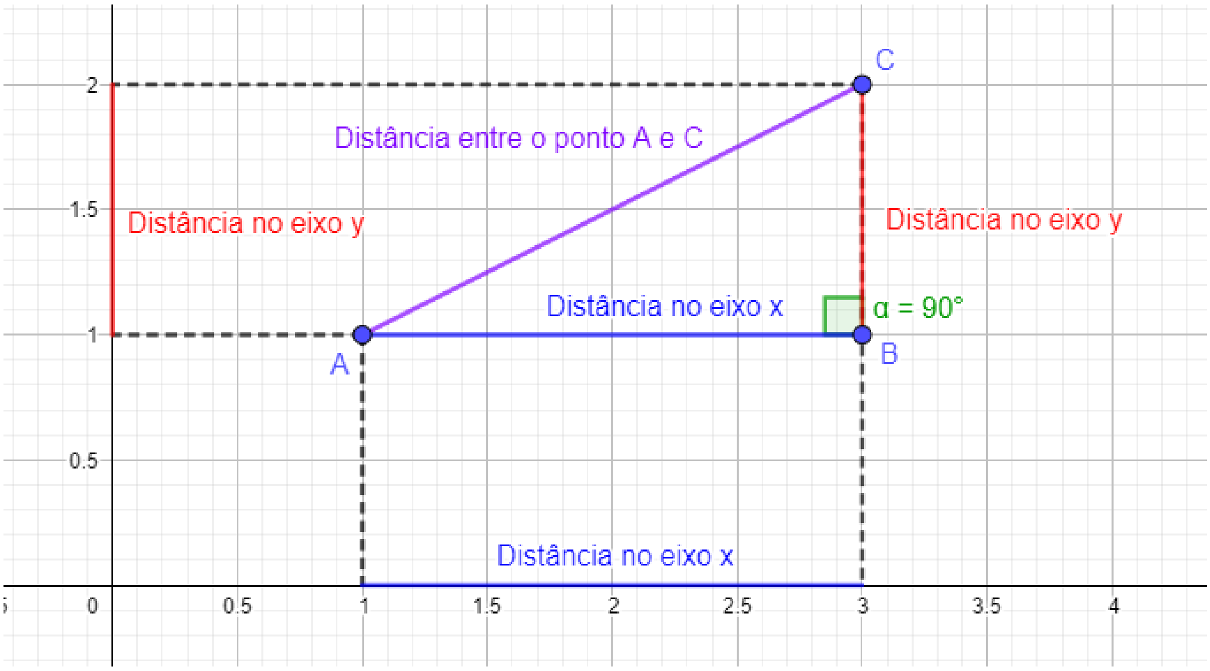
Fonte: Acervo dos autores

Após isso, será feita a resolução da questão proposta, espera-se que os alunos consigam resolvê-la sem problemas.

Resolução:

Através da construção obtida, podemos construir um triângulo retângulo com altura 1, com base no lado AB, medindo 3, e hipotenusa AC com valor desconhecido, como representado na Figura x. Utilizando o teorema de Pitágoras temos que $AC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$***, logo, a distância entre AC é*** $\sqrt{10}$***.***

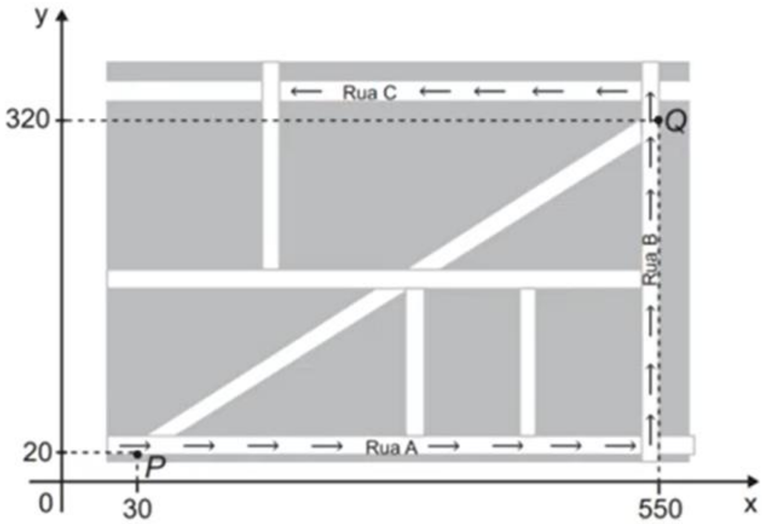
Figura 55: Triângulo retângulo exercício.



Fonte: Acervo dos autores

Por fim, serão propostos para os alunos os exercícios 02 e 03.

02-(Enem 2015 - Adaptado) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A Figura 15 mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, qual a coordenada de um novo ponto de parada?

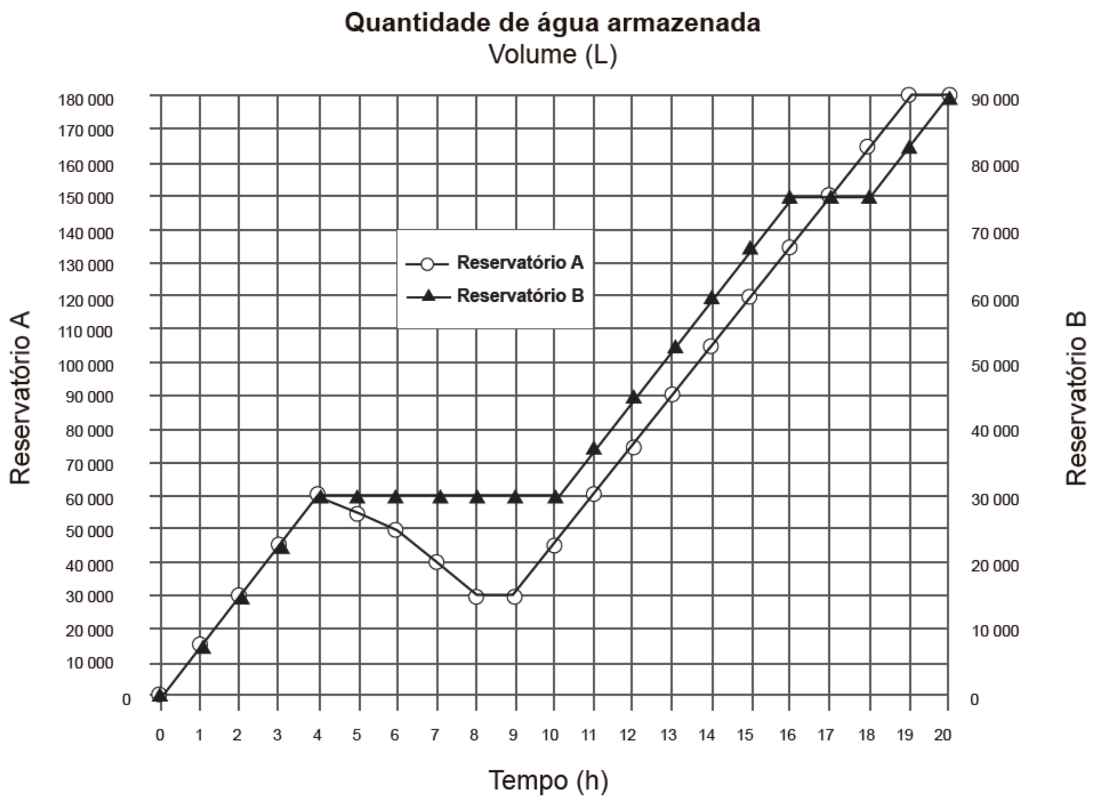
Resolução:

A distância total percorrida pelo ônibus é de dt = (550-30) + (320-20) = 820.

Como o ônibus deve percorrer a mesma distância entre os pontos P e T e T e Q, temos que a distância entre tais pontos deve ser de 410.

A coordenada do ponto no plano apresentado deve corresponder a distância de T = (410+30, 20) = (440,20).

03 - (ENEM - 2017) Dois reservatórios A e B são alimentados por bombas distintas por um período de 20 horas. A quantidade de água contida em cada reservatório nesse período pode ser visualizada na figura.



De acordo com o gráfico, é possível concluir que os dois reservatórios tiveram a mesma quantidade de água em algum momento? Caso isto tenha ocorrido, em quais horas e por quanto tempo os reservatórios permaneceram com a mesma quantidade de água?

Além disso, qual dos dois reservatórios apresentou maior quantidade de água durante o período de 20 horas?

Resolução:

Comparando os valores dos volumes dos reservatórios A e B mostrados nos eixos y, que estão em uma razão de $\frac{1}{2}$, por isso, os dois reservatórios tiveram a mesma quantidade de água durante 1 hora entre às 8 e 9 horas.

Além disso, por apresentar uma escala maior, o reservatório A foi o que mais teve água durante a medição.

COMENTÁRIOS DOS AUTORES:

O interesse desse exercício é alertar aos alunos, para sempre estar atentos ao que cada eixo está representado. Já que as informações estão representadas em um plano cartesiano, em que o eixo x representa o tempo em horas e o eixo representa o volume do reservatório em litros, com escalas diferentes no reservatório A e B.

4.4.1 Relatório de aula 4.

No dia nove de junho de 2022, foi encaminhado aos alunos a quarta aula do Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT), trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado II, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste- Campus Cascavel. Essa aula ocorre de maneira assíncrona, publicada na plataforma de compartilhamento de vídeo *YouTube*. O conteúdo trabalho foi plano cartesiano, coordenadas cartesianas, distância entre dois pontos, pontos colineares e ponto médio.

Os discentes Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin gravaram separadamente as partes da aula e as reuniram. A gravação foi realizada utilizando a ferramenta do *Microsoft Power Point,* na qual é possível gravar o conteúdo presentes dos *slides* com áudio. O áudio do vídeo ficou com intensidades diferentes por conta de que cada estagiário usou uma ferramenta de captação diferente. O vídeo tem ao todo quase 40 minutos, dos quais 14 minutos são dedicados à contextualização utilizando jogos realizada pelos acadêmicos. A descrição do xadrez e da batalha naval apesar de terem tomado uma boa parte da aula, mostraram-se uma alternativa válida para despertar o interesse dos alunos e ajudar na fixação do conteúdo, pois os alunos comentaram sobre os jogos quando ocorreu o reencontro presencial.

Toda a aula ocorreu como planejado, pois caso ocorressem erros era possível realizar novamente a gravação. Foi deixado um gancho para a próxima aula, sobre a realização de cálculo de distâncias entre dois pontos quando os pontos não estão nos eixos de coordenadas. A aula está disponível pelo *link: https://www.youtube.com/watch?v=-1bOJ8WNg_Y&t=77s.*

4.5 Plano de aula 5 – 11/06.

Conteúdo: Geometria Analítica.

Objetivo geral: Promover a apropriação e compreensão da definição formal da reta e suas propriedades, além de compreender características de retas paralelas, concorrentes e coincidentes.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar o conteúdo de equação da reta, suas especificidades e sobre a posição de duas retas no plano, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer a equação geral e reduzida da reta no plano;
- Reconhecer a equação geral da reta com base em um gráfico;
- Construir o gráfico de uma reta qualquer;
- Compreender o conceito de retas paralelas, concorrentes e coincidentes;
- Entender as propriedades da equação da reta, retas paralelas, concorrentes e coincidentes.

Tempo de execução:

Um encontro de 3 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Giz, lousa, projetor, lâminas e folha impressa com exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente os alunos serão indagados se assistiram à aula assíncrona, caso alguns não tenham assistido, será feita uma breve revisão, envolvendo a definição de um plano cartesiano e suas características, além disso, será reforçado que durante a aula, exponham suas dúvidas sobre o conteúdo. Após isso, a aula será iniciada com os alunos organizados em grupos, em seguida, os alunos serão indagados: “Vocês sabem o que é a equação geral da reta e como utilizá-la?”. Espera-se que os alunos deem como exemplo uma função afim, por ser o conteúdo mais próximo do trabalhado. Caso alguns alunos saibam, será solicitado que eles expliquem com as suas palavras o que lembram.

Será comentado com os alunos que a equação geral da reta é um dos conteúdos estudados na geometria analítica, que busca traduzir, por meio de uma equação, o comportamento de algumas figuras geométricas quando representadas no plano cartesiano, dentre elas a reta. A equação geral da reta é uma maneira de descrever o comportamento da reta de forma algébrica, porém, em sua forma reduzida, são utilizados os conceitos de coeficientes angulares e lineares. Antes de iniciar o conteúdo, os alunos serão indagados se lembram dos conceitos mencionados acima vistos no conteúdo de função afim, caso não se lembrem, tais conceitos serão definidos como na definição que segue.

O termo constante, a, é chamado de coeficiente angular. É a medida que caracteriza a inclinação da reta (gráfico da equação) em relação ao eixo das abscissas. Quando o coeficiente angular é positivo a função é crescente, quando o coeficiente angular é negativo a função é decrescente.

O termo constante, b, é chamado coeficiente linear da reta. Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto de intersecção do gráfico da equação com o eixo y.

Após isso, o seguinte exercício será apresentado no quadro:

Encontre a equação da reta que passa pelos pontos A(2, 4) e B(3, 7).

Os alunos serão questionados se sabem ou possuem alguma ideia de como resolver. Acredita-se que alguns alunos possuem “chutes” sobre como fazer. O exercício não será resolvido neste primeiro momento pois a partir desta questão, será apresentado o conceito de equação geral da reta. Inicialmente foi escolhida uma questão direta pois pretende-se fazer a ligação entre a questão com a demonstração de como se chega em uma equação geral da reta.

No quadro será mostrado o seguinte teorema.

Teorema: A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma ax + by + c = 0 em que a, b, c são números reais, a ≠ 0 ou b ≠ 0, e (x, y) representa um ponto genérico de r.

A partir do teorema supracitado, será realizado a demonstração dele, de modo que ajude os alunos a não recorrerem apenas a fórmulas, mas que consigam entendê-las, objetivando que consigam encontra-las através de definições e teoremas:

Demonstração:

Sejam $Q(x_1, y_1)$ e $R(x_2, y_2)$ dois pontos distintos do plano cartesiano. Isto significa que x_1 , y_1 , x_2 , y_2 são números reais (constantes) conhecidos.

Seja r a reta definida pelos pontos Q e R. Se P(x, y) é um ponto que percorre r, então x e y são variáveis. Como P, Q, R são colineares, temos necessariamente:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante pela regra de Laplace, temos:

$$x \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1 y_2 - x_2 y_2) = 0$$

Fazendo $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1 y_2 - x_2 y_2 = c$, decorre que todo ponto P ∈ r deve verificar a equação:

ax + by + c = 0

chamada equação geral de r.

Após feita a demonstração, será comentado com os alunos alguns pontos importantes:

1) Fica provado que toda reta, não importa sua posição, tem equação geral.

2) Convém notar que a mesma reta admite várias (infinitas) equações gerais, pois, se usarmos $Q'(x_1', y_1')$ e $R'(x_2', y_2')$, tal que Q' e R' pertençam a r, para definirmos a reta r, com Q' ≠ Q e R' ≠ R, obteremos provavelmente uma outra equação: a'x + b'y + c' = 0. Isso significa que a toda reta r do plano cartesiano está associado um conjunto de equações equivalentes entre si.

3) Os coeficientes a e b não podem ser simultaneamente nulos, pois:

$$\left.\begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \\ b = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = R$$

e Q ≠ R por hipótese.

Após isso, será voltada à questão 1, na qual será resolvida de mesma forma que foi feito na demonstração do teorema, sempre associando a questão com o conteúdo apresentado:

1 - Encontre a equação da reta que passa pelos pontos A(2, 4) e B(3, 7).

Resolução:

Calculando o determinante e igualando a zero:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{2 \cdot 7 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot \boldsymbol{x} + 1 \cdot 3 \cdot \boldsymbol{y} - 1 \cdot 7 \cdot \boldsymbol{x} - 2 \cdot 1 \cdot \boldsymbol{y} - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 0}$$

$$\mathbf{14 + 4\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} - 7\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} - 12 = 0}$$

Então a equação geral da reta é

$$\mathbf{-3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + 2 = 0}$$

Após, será apresentado o conceito inicial de equação reduzida da reta, que consiste em isolar o valor de y em um dos lados e, assim, obter uma expressão semelhante a uma função afim, porém com algumas particularidades em relação a ela.

A equação reduzida da reta é a equação y = mx + n, em que m e n são, respectivamente, os coeficientes angular e linear, enquanto x e y são, respectivamente, a variável independente e dependente.

y = mx + n

Tal equação é obtida isolando o y na equação geral da reta, assim, temos que:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Assim, temos que:

$m = \frac{-a}{b} \rightarrow$ coeficiente angular

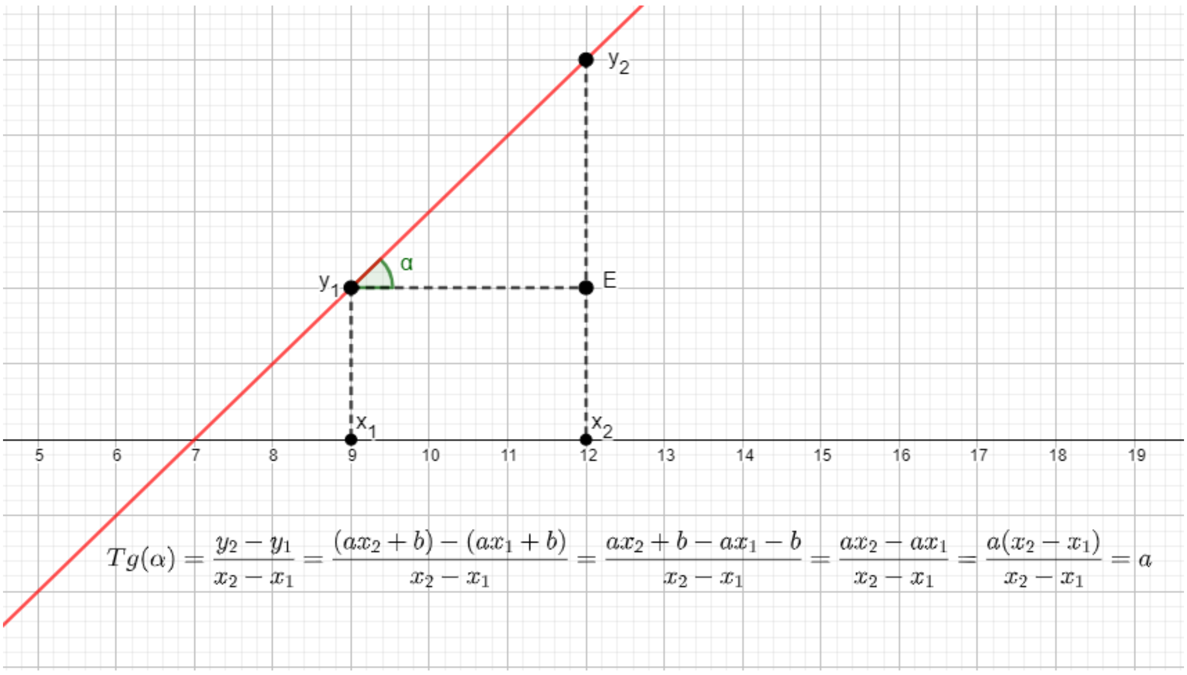
$n = \frac{-c}{b} \rightarrow$ coeficiente linear

y → variável dependente

x → variável independente

Continuando com a explicação, os alunos serão indagações sobre o que representa o coeficiente angular da função afim, espera-se que respondam que corresponde ao ângulo da reta, assim, será utilizada a imagem abaixo para demonstrar que o coeficiente angular é, na verdade, igual ao valor da tangente do ângulo que o gráfico da função afim faz com o eixo x. Este ângulo chama-se α, logo $a = Tg(\alpha)$, tal relação é originada de relações trigonométricas. Espera-se que os alunos consigam entender o conceito sem muitas dificuldades.

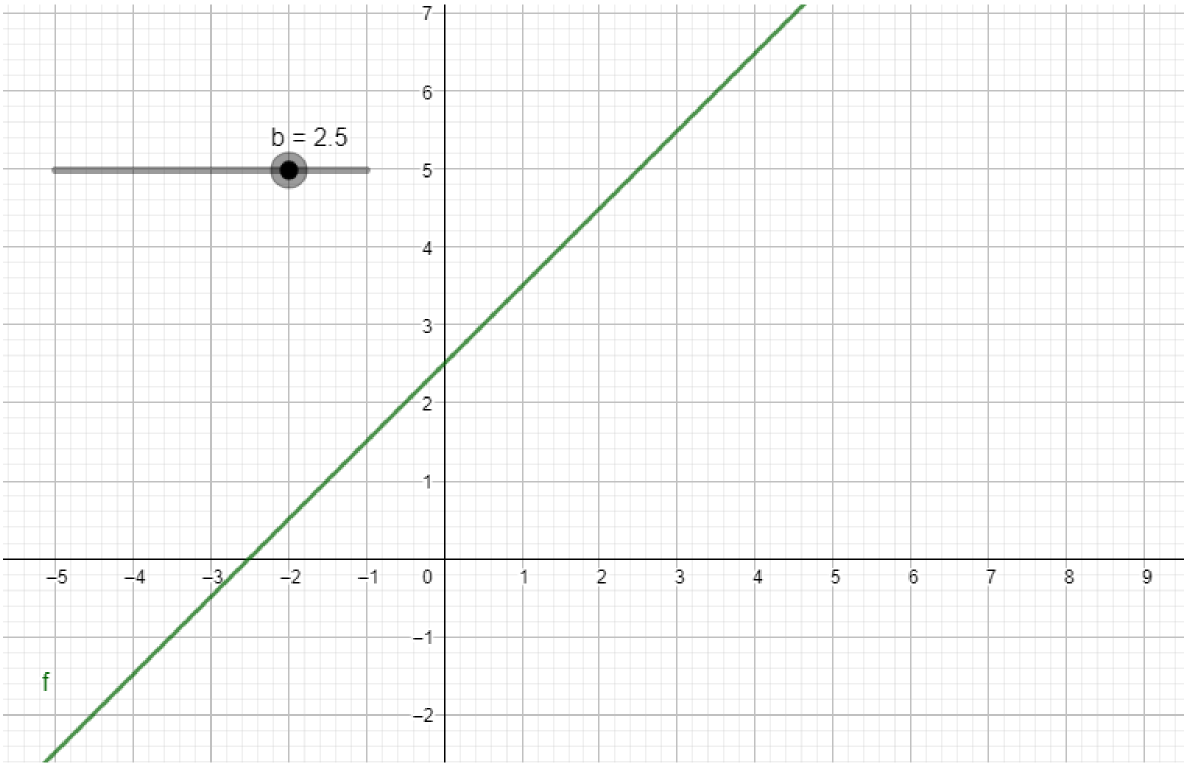
Figura 56: Coeficiente angular.



Fonte: Acervo dos autores

Por fim, será mostrado, por meio do geogebra, que conforme alteramos o coeficiente linear, o ponto em que a reta se intercepta com o eixo y é alterado, como representado pela Figura x.

Figura 57: Controle deslizando no coeficiente linear.



Fonte: Acervo dos autores

Considerando que aparecem novos ternos, os alunos serão questionados sobre o que são os coeficientes angular e linear. Será relembrado aos alunos que, por meio do valor do coeficiente angular, é possível saber se a reta é crescente, decrescente ou constante. Já o coeficiente linear mostra o ponto em que a reta intercepta o eixo vertical y.

Após isso, serão trabalhados alguns casos característicos entre duas, ou mais, retas, entre eles, será destacado que, entre as possibilidades, duas retas podem ser, concorrentes, com apenas um ponto em comum, paralelas e distintas, como nenhum ponto em comum ou coincidente, com todos os pontos em comum. Assim, serão analisados tais casos com base no sistema de retas abaixo.

$$\begin{cases} (r) a_1 x + b_1 y = c_1 \\ (s) a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Primeiramente, os alunos serão questionados se, por meio das equações acima, é possível encontrar o ponto de intersecção entre duas retas quaisquer. Espera-se que os alunos respondam que o ponto desejado é o ponto em que x e y possuem o mesmo valor em ambas as retas. Assim, será comentado que, além disso, é possível dizer se duas retas são concorrentes, paralelas ou coincidentes resolvendo o sistema acima, de forma que.

Ao se resolver o sistema com duas retas pelo método da adição, temos que:

$$\begin{cases} (a_1x + b_1y = c_1)(b_2) \\ (a_2x + b_2y = c_2)(-b_1) \end{cases}$$
$$\overline{(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1}$$

$$\begin{cases} (a_1x + b_1y = c_1)(-a_2) \\ (a_2x + b_2y = c_2)(a_1) \end{cases}$$
$$\overline{(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1}$$

De forma que:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$$
$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_1$$
$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_2$$

Assim, o sistema fica reduzido à:

$$\begin{cases} Dx = D_1 \\ Dy = D_2 \end{cases}$$

Ou seja, dependendo do valor de D, as soluções podem ser alteradas de forma que:

Se D ≠ 0, então temos uma única solução, logo um único ponto em comum, e r é concorrente a s, ou r X s.

Se D = 0 e D1 (ou D2) ≠ 0, então o sistema não tem solução, logo não há pontos em comum, e consequentemente, r é paralela a s, ou r // s.

Por fim, se D = 0, D1 = 0 e D2 = 0, temos que o sistema tem infinitas soluções, e consequentemente, r é coincidente a s, ou r = s.

Após isso, serão desenvolvidos os resultados anteriores de forma a encontrar correlações entre os coeficientes das equações r e s que permitam diferenciar os diferentes casos de retas.

Quando $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow c_1 b_2 = c_2 b_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow a_1 c_2 = a_2 c_1$$

E a teoria pode ser simplificada para

$$r\, X\, s \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$r \cap s \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$r = s \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

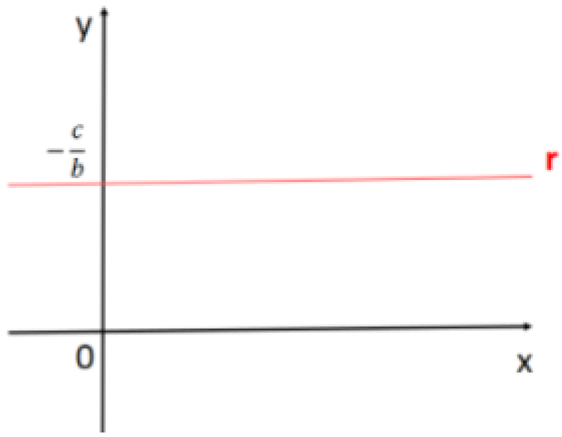
Após isso, serão trabalhados alguns casos específicos de equações da reta, de forma que fique evidente a correlação entre a equação geral da reta e a equação reduzida.

1) $a = 0$ e $b \neq 0$

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$$

E portanto, a reta é paralela ao eixo x:

Figura 58: Reta paralela ao eixo x.



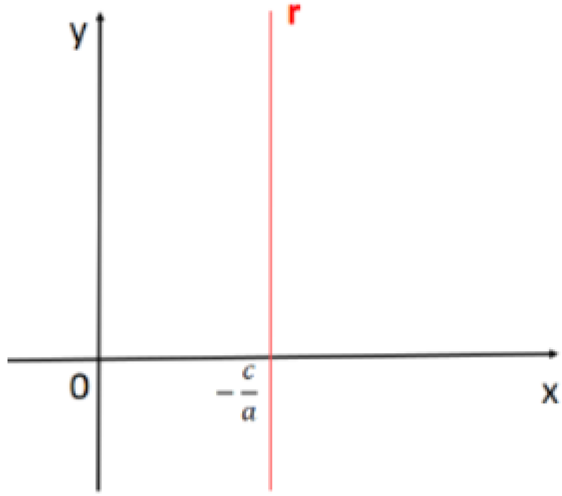
Fonte: Acervo dos autores.

2) Se $b = 0$ e $a \neq 0$

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$$

E portanto, a reta é paralela ao eixo y:

Figura 59: reta paralela ao eixo y.



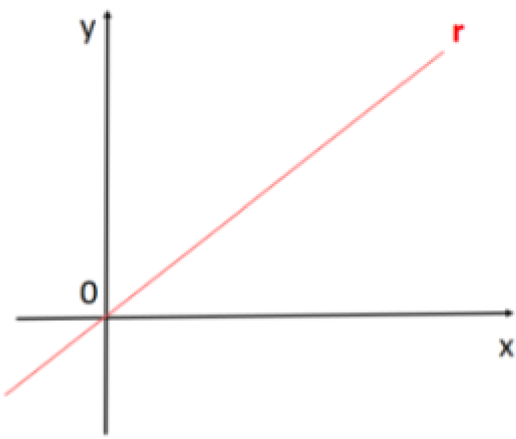
Fonte: Acervo dos autores.

3) Se c = 0

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by = 0$$

E portanto, a reta passa pela origem:

Figura 60: Reta passando na origem.



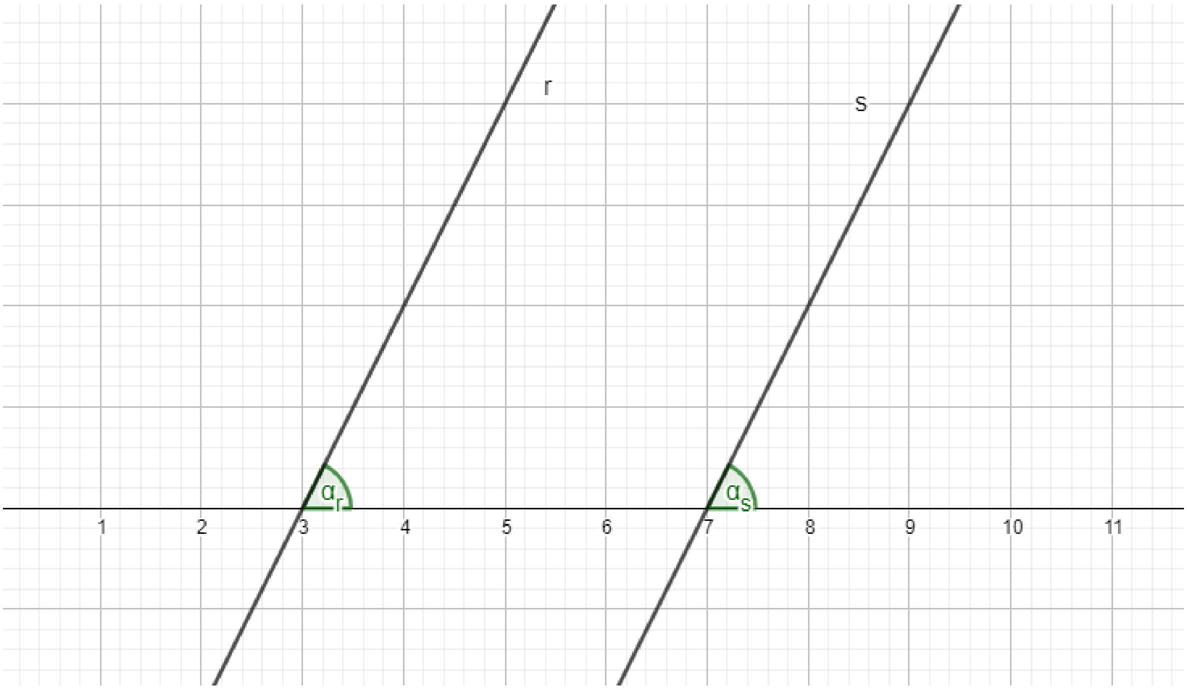
Fonte: Acervo dos autores.

Após verificar os casos acima, será comentado sobre as condições para que duas retas sejam paralelas ou perpendiculares entre si. Para isso, será utilizado as definições que seguem.

Teorema: Duas retas r e s, não verticais, são paralelas entre si se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais.

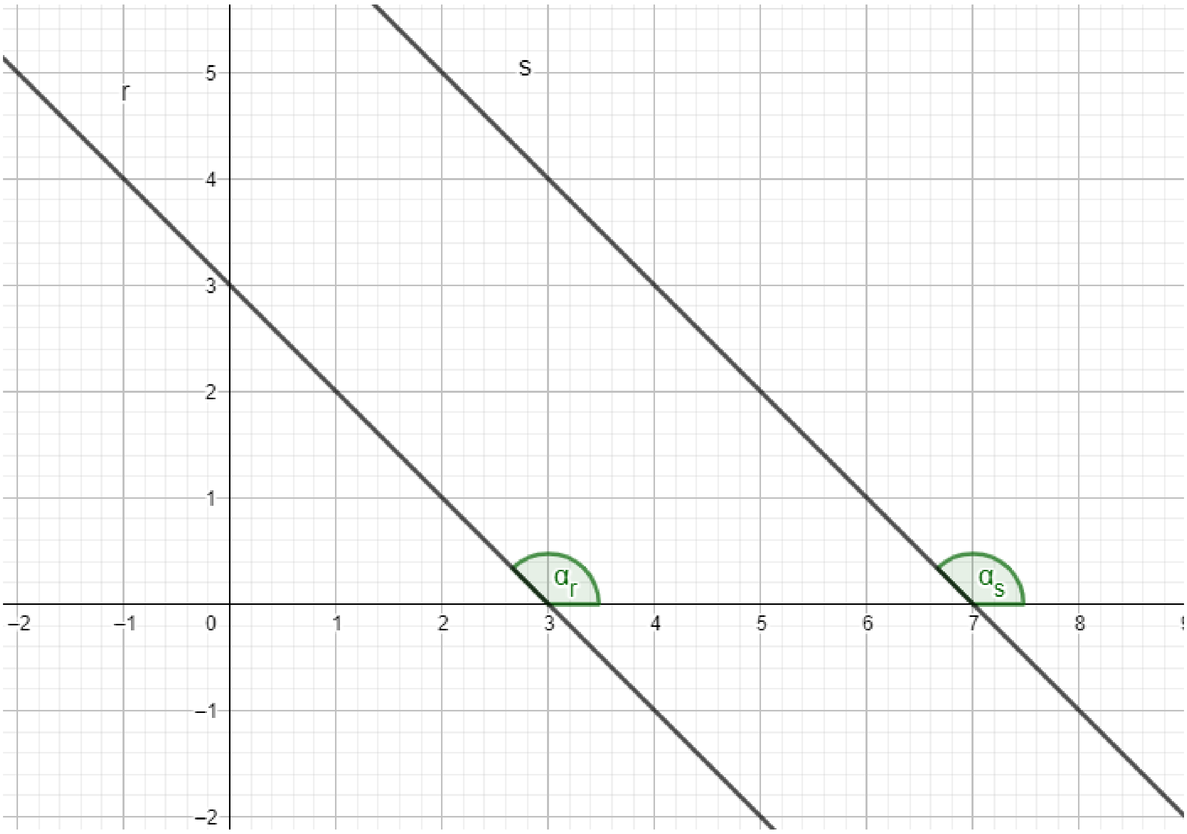
Demonstração: r // s $\Leftrightarrow$ $\alpha_r = \alpha_s$ $\Leftrightarrow$ $tg(\alpha_r) = tg(\alpha_s)$ $\Leftrightarrow$ $m_r = m_s$

Figura 61: Retas paralelas crescentes.



Fonte: Acervo dos autores

Figura 62: Retas paralelas decrescentes.

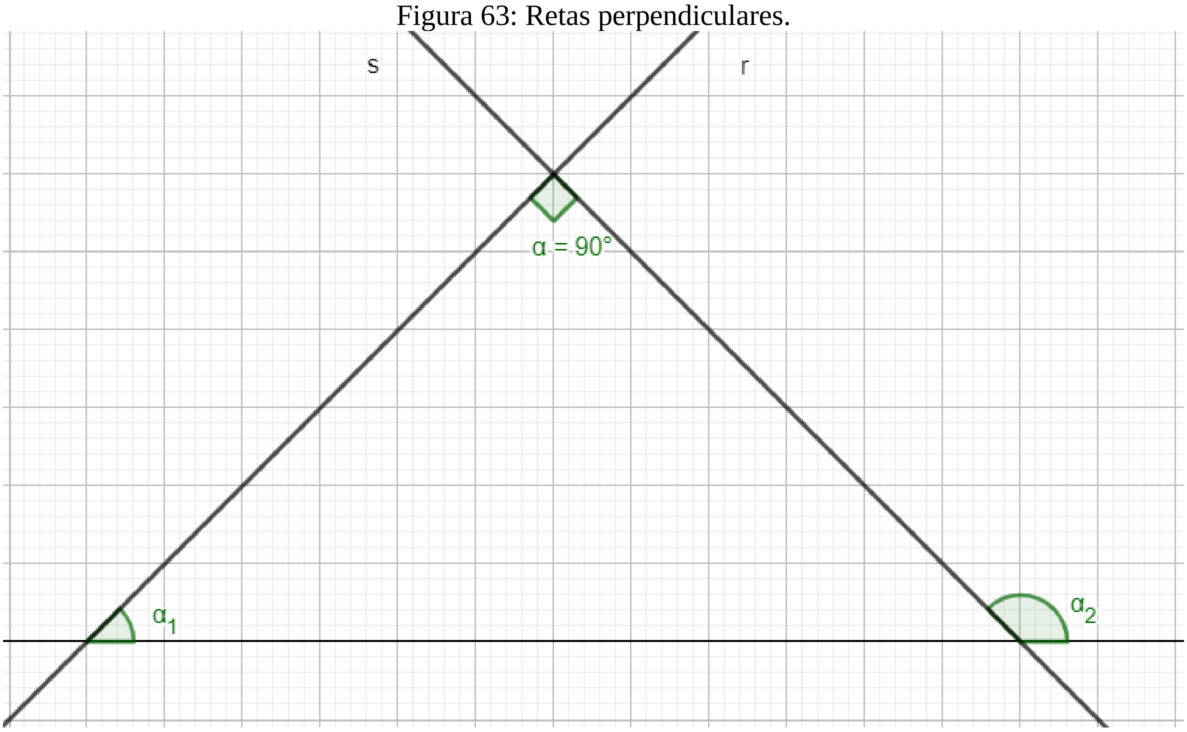


Fonte: Acervo dos autores

Teorema: Duas retas r e s, não verticais, são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1.

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r . m_s = -1$$

Figura 63: Retas perpendiculares.



Fonte: Acervo dos autores

Conforme o caso da Figura acima, temos que:
$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\Pi}{2}$ (ângulo externo é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes)

$$tg(\alpha_2) = tg(\alpha_1 + \frac{\Pi}{2}) \Rightarrow tg(\alpha_2) = cotg(-\alpha_1) \Rightarrow tg(\alpha_2) = -\frac{1}{tg(\alpha_1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow tg(\alpha_2).tg(\alpha_1) = -1 \Rightarrow m_r.m_s = -1$$

Por fim, serão propostos as seguintes questões para os alunos.

1 - Qual a equação que representa a reta que passa pelos pontos (4,$\frac{5}{2}$) e (2,$\frac{9}{2}$)?

a) **2x-2y-13=0**
b) **12x-5y+8=0**
c) **2x+2y-5=0**
d) **-2x-2y+13=0**
e) **2x+5xy+18=0**

Resolução:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{18} - \mathbf{5} - \frac{\mathbf{9}\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{13}$$

Alternativa D

2 - Dado o ponto A(-2,4), determine as coordenadas de dois pontos P e Q, situados, respectivamente, sobre as retas y=3x e y=-x, de tal modo que A seja o ponto médio do segmento PQ.

a) **P(1,3) e Q(-5,5)**
b) **P(2,6) e Q(4,-4)**

c) P(0,0) e Q(-5,5)

d) P(1,3) e Q(4,-4)

e) P(2,6) e Q(0,0)

Resolução:

Tomando os pontos P=(c,d) e Q=(a,b), temos que o ponto médio A é obtido da forma $\frac{c+a}{2} = -2$ e $\frac{d+b}{2} = 4$, assim, temos que $c + a = -4$ e d+$b = 8$, somando as coordenadas temos que $c + a + d + b = -4 + 8 = 4$.

Como P pertence à reta y=3x, então temos que d=3c e, como Q pertence à reta y=-x temos que b=-a, assim, temos que $c + a + d + b = 4 \Rightarrow c + a + 3c - a = 4 \Rightarrow c + 3c = 4 \Rightarrow c = 1$, e consequentemente, temos que d=3, a=-5 e b=5. Logo, a alternativa correta é a A.

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos. Além disso, durante a resolução dos exercícios os alunos serão acompanhados e avaliados com base na compreensão do conteúdo e nas interações realizadas.

Referências:

DANTE. Roberto. **Tudo é Matemática**. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar - Trigonometria** – v.1, 8ª. ed. São Paulo: Atual. 2004.

UNIOESTE - **Prova da Segunda Etapa** (Segundo dia). [*S. l.*], 2012. Disponível em: <https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2012/PROVA_DE_INGLES.pdf>. Acesso em: 8 abr. 2022.

UNIOESTE - **Prova da Segunda Etapa** (Segundo dia). [*S. l.*], 2011. Disponível em: <https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2011/Grupo_1.pdf>. Acesso em: 8 abr. 2022.

UNIOESTE - **Prova da Segunda Etapa** (Segundo dia). [*S. l.*], 2014. Disponível em: <https://www.unioeste.br/cogeps/arquivos/vestibular/2014geral/030.pdf>. Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2011 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. - Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2009 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2009/dia2_caderno5_amarelo.pdf> - Acesso em: 8 abr. 2022.

4.5.1 Relatório de aula 5.

No dia onze de junho de 2022 às 08 horas e 10 minutos, iniciou-se a quinta aula do Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT), trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado II, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste - Campus Cascavel. A aula ocorreu de modo presencial, na Unioeste e estavam presentes 11 alunos.

Os alunos foram indagados sobre o vídeo disponibilizado durante a semana, a respeito de plano cartesiano e distância entre pontos. Uma aluna pediu para que fosse explicado novamente como é calculada a distância entre os dois pontos. Essa explicação foi feita e, além disso, foi resolvido o exercício do vídeo, que havia ficado de tarefa como gancho para continuar o conteúdo.

Ao pedir para os alunos, como poderia ser calculada a distância entre dois pontos, quando os pontos não estão no mesmo eixo de coordenadas, um aluno respondeu corretamente, dizendo que seria necessário utilizar "Pitágoras na distância entre pontos" da seguinte forma:

$$(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 = (dab)^2 \text{ ou ainda } dab = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

A acadêmica continuou explicando o conteúdo acima e perguntou aos alunos se poderia separar a raiz de uma soma, ou seja, se $\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = \sqrt{(x_b - x_a)^2} + \sqrt{(y_b - y_a)^2} = x_b - x_a + y_b - y_a$ esta passagem seria verdadeira. Uma aluna disse que, corretamente, **não pode**! Os alunos foram indagados a respeito disso pois se trata de um erro muito comum realizar essa "separação" entre as raízes e depois "cortá-la" com a potência ao quadrado.

Como no exercício em questão os pontos formavam um triângulo, um aluno perguntou se dados os vértices de um triângulo é possível calcular o seu ponto central. Para responder essa pergunta, foi explicado que se pode inscrever o triângulo em uma circunferência e então os vértices estarão a mesma distância do centro.

As estagiárias começaram a falar sobre conteúdos de geometria tais como circuncentro, ortocentro, mediatriz, mediana. A prof. Andréia juntamente com o aluno entraram no debate sobre como calcular, porém a maioria dos alunos ficou perdido no que estava acontecendo. E então, às 08:50 iniciou-se o conteúdo programado para essa aula.

Foi trabalhado o conteúdo de equação geral da reta. Para isso, foi apresentado o conteúdo na lousa e deixado um tempo para os alunos pudessem copiar o conteúdo. Após isso, foi desenhado um plano cartesiano e começou o conteúdo determinante, o qual foi apresentado rapidamente e voltou para a dedução da equação geral da reta.

Em seguida, foi proposto aos alunos para encontrarem a equação geral da reta que passa pelos pontos A(2,4) e B(3,7). Para isso, foi disponibilizado um tempo para aos alunos resolverem o exercício. Uma aluna pediu sobre a definição de determinante, o que é e como se calcula. Mostramos para eles rapidamente a representação geométrica de determinante. Outra pergunta que vale a pena salientar foi uma dúvida de um aluno se a matriz já aparece pronta no vestibular ou é necessário montá-la. Durante a explicação apareceu um módulo e um aluno questionou o que era e qual era sua utilidade

Após isso, foi deduzida a equação reduzida da reta e falou sobre variáveis dependentes e independentes. Durante toda a aula, houve um pouco de conversa paralela, porém sempre que indagados, os alunos respondiam e tiravam suas dúvidas.

Um bom tempo da aula foi perdido tentando realizar a projeção do *software* Geogebra, pois o projetor não estava funcionando. Os estagiários, a orientadora, e até alguns alunos, tentaram fazer com que o projetor funcionasse mas não obtiveram sucesso. Logo foi necessário seguir a aula sem realizar a projeção, então alguns desenhos foram feitos rapidamente no quadro e a projeção será feita em aulas seguintes. Aproveitando os desenhos realizados no quadro foi comentando sobre coeficiente linear e angular. Explicitando que o coeficiente angular é o valor da tangente do ângulo, realizando uma junção dos conteúdos trabalhados. A aula se encerrou às 11 horas e 38 minutos.

4.6 Plano de aula 6 – 25/06.

Conteúdo: Geometria Analítica.

Objetivo geral: Promover a apropriação e compreensão da definição formal da circunferência e suas propriedades, além de compreender algumas relações entre o ponto, a reta e a circunferência.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar o conteúdo de circunferência, suas especificidades e sobre as posições relativas entre ponto, reta e circunferência no plano, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer a equação geral e reduzida da circunferência;
- Reconhecer a equação geral da circunferência com base no plano cartesiano;
- Construir o gráfico de uma circunferência qualquer;
- Compreender os conceitos de circunferências tangentes e secantes;
- Entender as propriedades da equação da circunferência.
- Reconhecer as posições relativas entre ponto, reta e circunferência.

Tempo de execução:

Um encontro de 3 horas e 30 minutos.

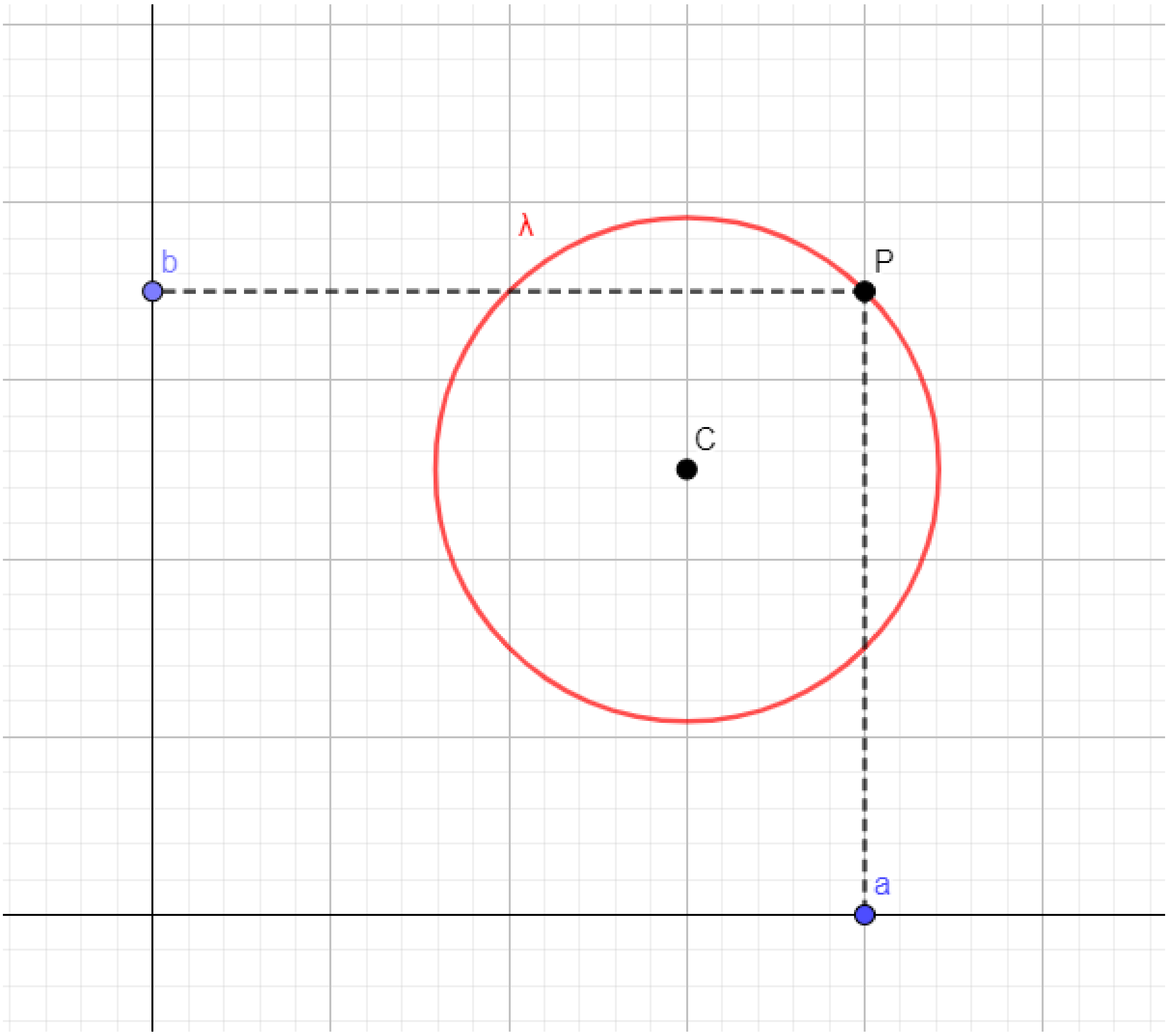
Recursos didáticos:

Giz, lousa, projetor, lâminas e folha impressa com exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente os alunos serão indagados sobre o conteúdo da última aula e será escrito no quadro a forma geral da equação da reta e relembradas algumas de suas características, como, por exemplo, sua relação com uma função linear. Após isso, será iniciado o conceito de equação de uma circunferência, para isso, será desenhada no quadro a Figura x e, a partir disso, será feita a definição do que é uma circunferência com base na definição abaixo.

Figura 64: Circunferência num plano.



Fonte: Acervo dos autores

> Definição: Dado um ponto C, pertencente ao plano α, e uma distância r não nula, chama-se circunferência o conjunto dos pontos de α que estão à uma distância r do ponto C. Ou seja, circunferência = {P ∈ α I PC = r}.

Espera-se que os alunos compreendam tal conceito de maneira intuitiva para que, após isso, será iniciada a construção do conceito da equação reduzida da circunferência com base no desenvolvimento abaixo.

Considerando uma circunferência λ de centro C (a,b) e raio r. Um ponto P (x,y) pertencente a λ se, e somente se, a distância PC é igual ao raio r, assim, a equação de uma circunferência deve satisfazer a tal condição, ou seja, temos que PC = r.

A distância entre dois pontos num plano α é dada pela equação:

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=d$, como d = r, temos que a distância entre o ponto P e o ponto C é $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$. Assim, elevando ambos os lados da equação ao quadrado, obtemos a equação na forma.

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, que é chamada de equação reduzida da circunferência, uma vez que todos os pontos x e y que mantenham a igualdade também satisfazem a definição de circunferência.

Espera-se que os alunos consigam relacionar os conteúdos vistos anteriormente e, dessa forma, entendam os procedimentos e, consequentemente, a equação. Seguindo com o conteúdo, será mostrado a forma normal da equação da circunferência com base no desenvolvimento abaixo.

A equação normal de uma circunferência é dada pelo desenvolvimento da equação reduzida, assim, temos que:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2=r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Após isso, será desenvolvida a equação $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ para mostrar aos alunos como encontrar a equação reduzida da circunferência com base na equação geral. Espera-se que, por se tratar do procedimento inverso das operações feitas até o momento, os alunos tenham algumas dúvidas, assim, ao longo do processo, serão comparados os coeficientes a, b e r nas duas formas da equação, para facilitar o entendimento.

$$x^2+y^2-2x-2y-7=0 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2-2x-2y=7 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2-2x-2y+2=7+2 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2-2x-2y+2=9 \Rightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

representa uma circunferência de centro C(1,1) e raio r = 3.

Em seguida, serão trabalhadas algumas posições relativas entre circunferências, retas e pontos, sendo, inicialmente, estudado os três casos relativos à circunferência e ao ponto. Para abordar tal conteúdo será construída uma circunferência na lousa e, a partir disso, serão explicados os possíveis casos com base nas definições que seguem.

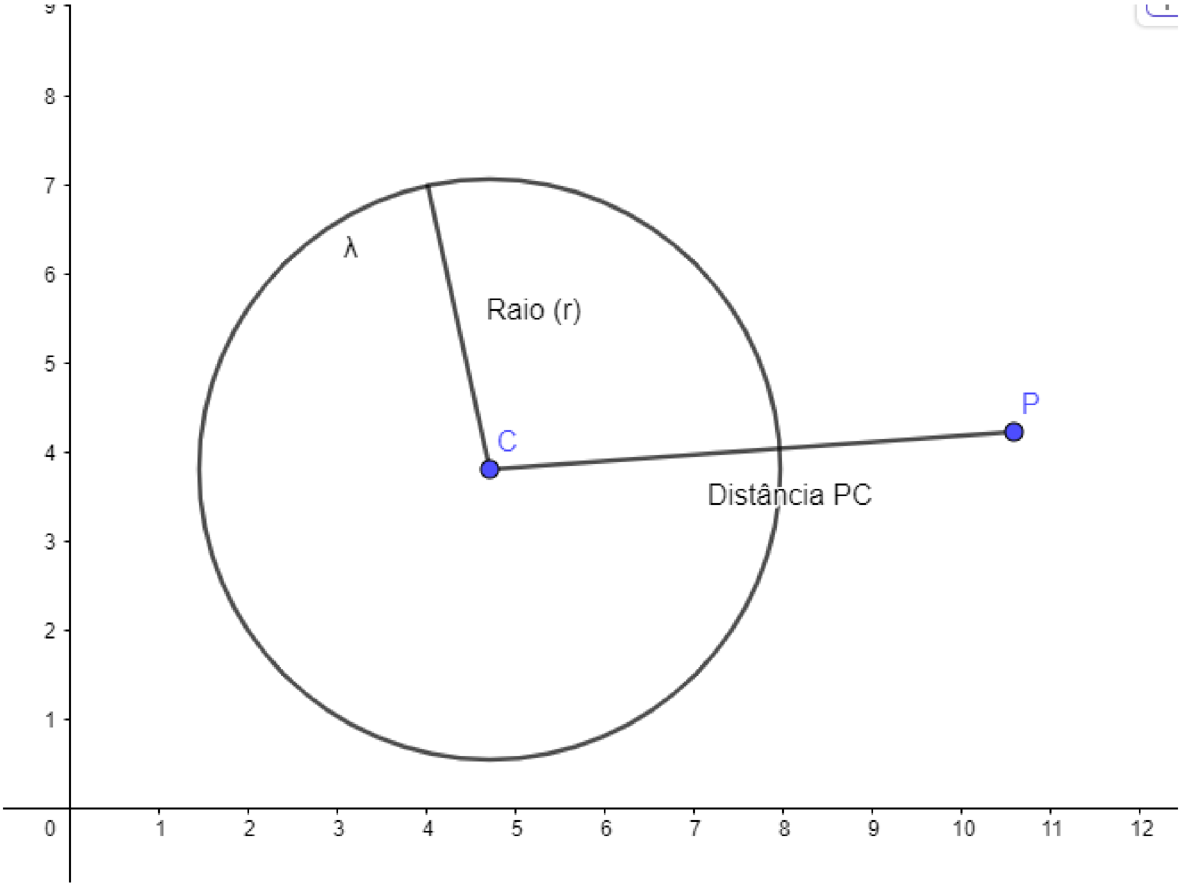
Tomando um ponto $P(x_0, y_0)$ e a circunferência λ, com equação$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, queremos saber a posição do ponto P em relação à circunferência, para isso, tomamos a distância do ponto P ao centro C da circunferência e analisamos cada possível caso. Assim, temos que:

P é ponto exterior à λ sempre que a distância $\overline{PC} > r$, ou ainda, caso a inequação $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$ ocorrer. Como mostrado na Figura x.

P é ponto da circunferência λ sempre que a distância $\overline{PC} = r$, ou ainda, caso a equação $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$ ocorrer. Como mostrado na Figura x.

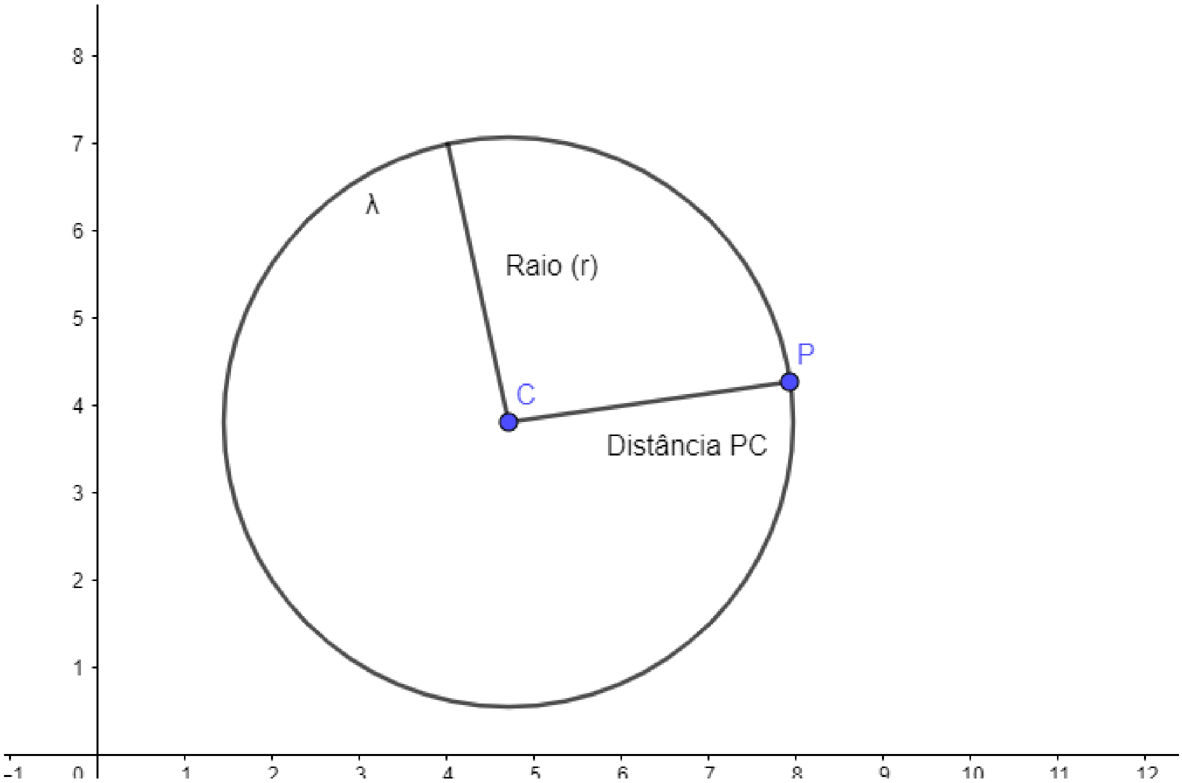
P é ponto interior à λ sempre que a distância $\overline{PC} < r$, ou ainda, caso a inequação $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$ ocorrer. Como mostrado na Figura x.

Figura 65: Ponto exterior à circunferência.



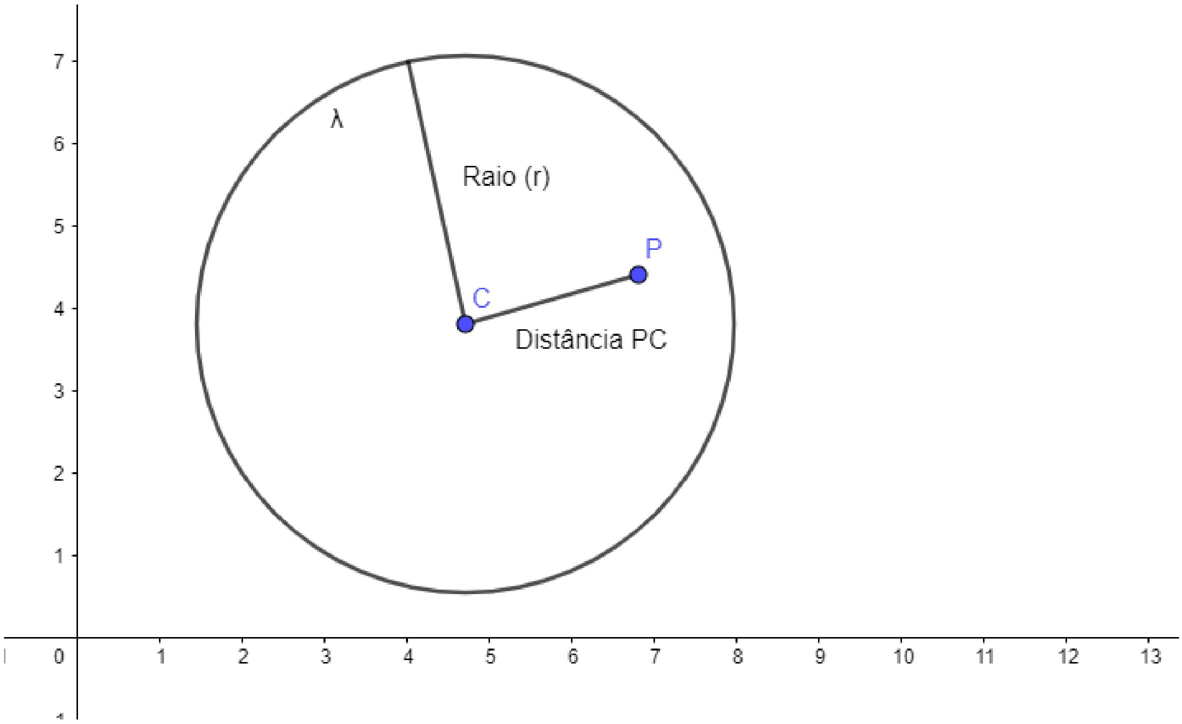
Fonte: Acervo dos autores

Figura 66: Ponto da circunferência.



Fonte: Acervo dos autores.

Figura 67: Ponto interior à circunferência.



Fonte: Acervo dos autores.

Após isso, serão trabalhadas as posições relativas à circunferência e a reta, para as quais serão necessários conceitos vistos em aulas anteriores, tais como o de retas secantes e tangentes. Assim, os alunos serão indagados sobre o que lembram desses conceitos e, caso haja dúvidas, será feita uma breve revisão de tais conceitos. Os conceitos serão abordados com base no quadro que segue.

Dadas uma reta r, com equação geral Ax + By + C = 0 e uma circunferência λ, com equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Para encontrar os pontos P(x,y) em que a reta r intersecta a circunferência λ, temos que tal ponto deve satisfazer, simultaneamente, ambas as equações, assim, temos que o sistema a seguir deve ser resolvido.

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \end{cases}$$

Para resolver tal sistema, podemos utilizar o método de substituição, de forma a obter o seguinte resultado.

Tomando $y=\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ e substituindo na equação da circunferência temos:

$$(x-a)^2+(\frac{A}{B}x-(\frac{C+b^2}{B}))^2=r^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-2ax+a\quad+\frac{A^2}{B^2}x^2-\frac{2C+2B^2}{B}x+\frac{C^2+2C.B^2B^4}{B^2}-r^2=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\frac{A^2+B^2}{B^2})x^2-(2a+\frac{2C+2B^2}{B})x+a^2+\frac{C^2+2C.B^2B^4}{B^2}-r^2=0\Rightarrow$$

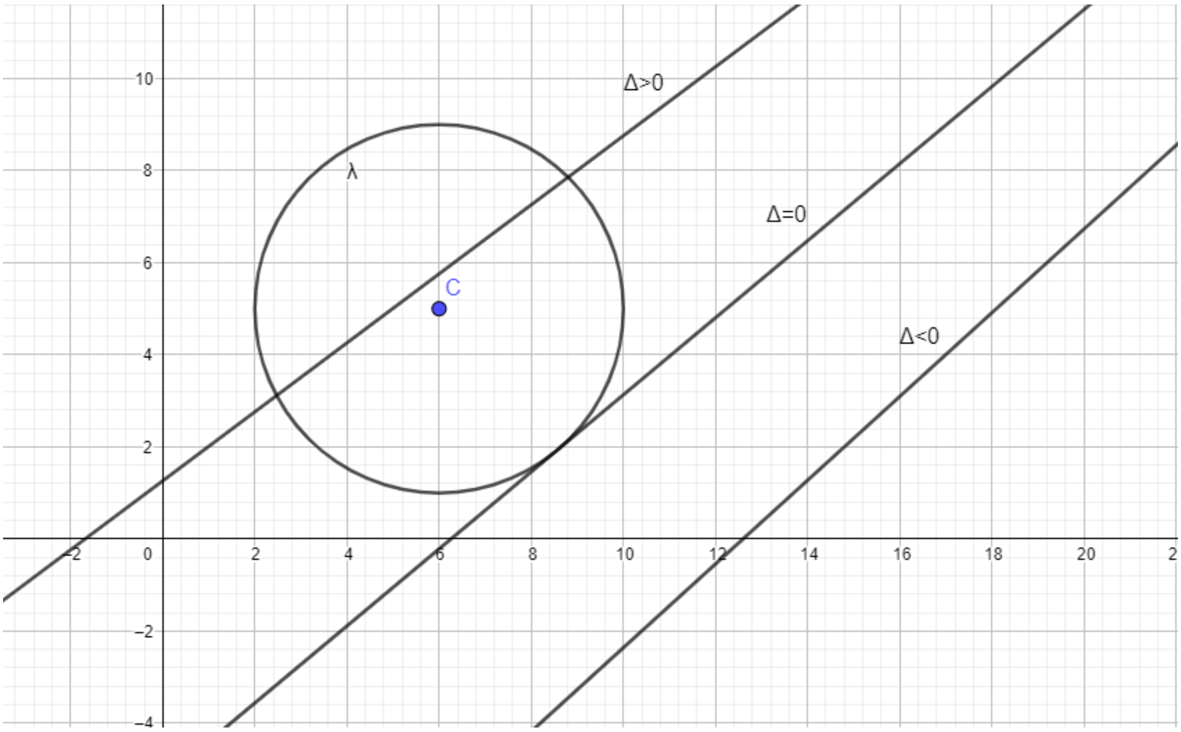
Tomando $\frac{A^2+B^2}{B^2}=a$, $2a+\frac{2C+2B^2}{B}=b$ e $a^2+\frac{C^2+2C.B^2B^4}{B^2}-r^2=c$ obtemos uma equação de segundo grau. Assim, temos 3 casos possíveis para a solução desse sistema em que, $\Delta>0$, $\Delta=0$ e $\Delta<0$.

Caso $\Delta>0$, temos 2 valores distintos que solucionam o sistema, consequentemente a reta r intersecta a circunferência λ em dois pontos e chamamos tal reta de secante à λ.

Caso $\Delta = 0$, temos 2 valores iguais que solucionam o sistema, consequentemente a reta r intersecta a circunferência λ em um único ponto e chamamos tal reta de tangente à λ.

Caso $\Delta < 0$, não temos valores reais que solucionam o sistema, consequentemente a reta r não intersecta a circunferência λ em nenhum ponto e chamamos tal reta de exterior à λ.

Figura 68: Possíveis casos de intersecção de reta e circunferência.



Fonte: Acervo dos autores.

Em seguida, serão trabalhados os possíveis casos de intersecção entre duas circunferências. Espera-se que os alunos tenham algumas dúvidas por serem conceitos que envolvem diversos cálculos, assim, conforme a explicação, será dado ênfase no passo a passo das contas. Assim, os conceitos serão escritos no quadro com base no quadro que segue.

Dadas duas circunferências, λ_1 e λ_2, representadas pelas equações abaixo.

$$\lambda_1 \Rightarrow (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = {r_1}^2$$

$$\lambda_2 \Rightarrow (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = {r_2}^2$$

Para encontrar os pontos P(x,y) que correspondem, simultaneamente, à ambas as circunferências basta resolver o sistema abaixo.

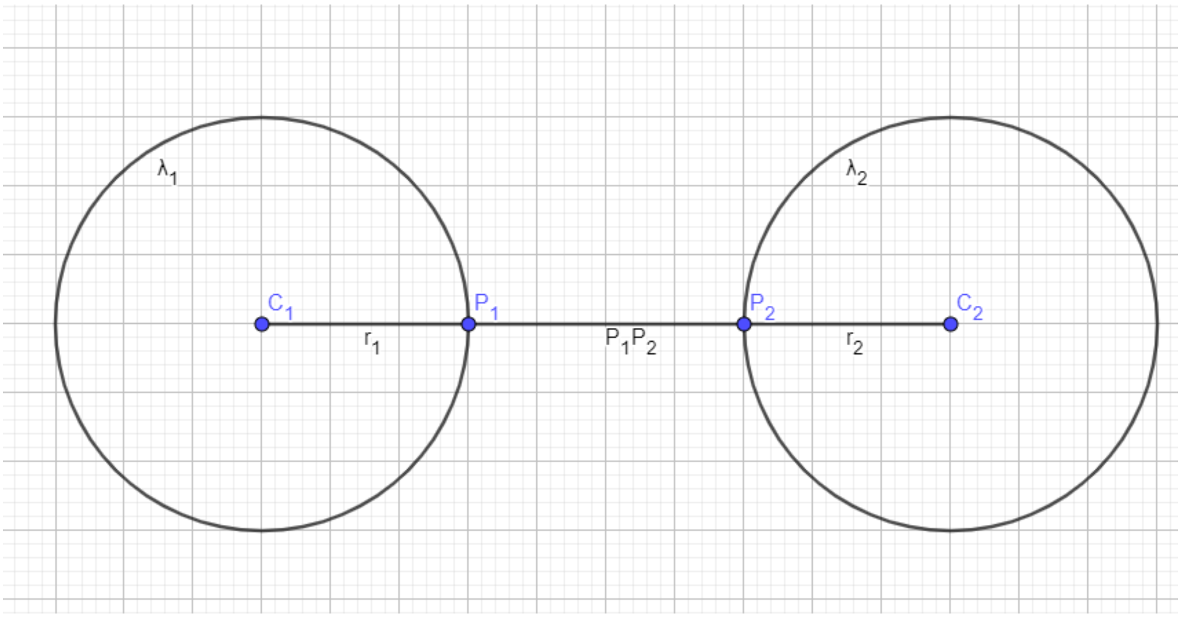
$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2\end{cases}$$

Uma das possibilidades de resolução é, primeiramente, subtrair membro a membro das equações e, após isso, isolar uma das variáveis, x ou y, e substituir em uma das equações do sistema. Porém, para analisar as posições relativas à duas circunferências, basta comparar a distância entre os centros de cada circunferência, a soma entre seus raios e a diferença, em módulo, de seus raios.

Assim, é possível ocorrer seis possíveis casos, sendo eles:

1°) Circunferências exteriores entre si: como ilustrado na Figura x, temos que tais circunferências possuem a distância entre C_1 e C_2 maior que a soma de seus raios, pois:

Figura 69: Circunferências exteriores.



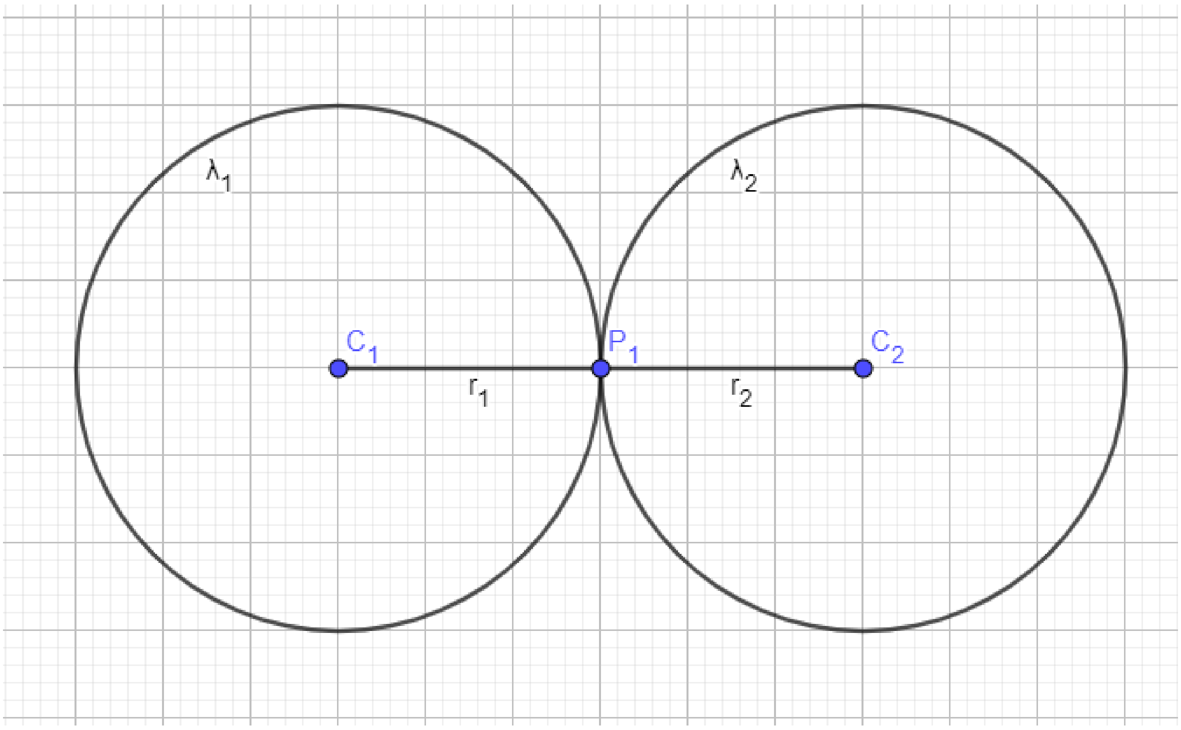
Fonte: Acervo dos autores

Tomando $r_1=\overline{C_1P_1}$, $r_2=\overline{C_2P_2}$ e, além disso, distância $\overline{P_1P_2}$, então, a distância entre os pontos C_1 e C_2 corresponde a:

$r_1 + r_2 + \overline{P_1P_2}$, ou seja $d > r_1 + r_2$, pois $\overline{P_1P_2} > 0$.

2°) Circunferências tangentes exteriormente: como ilustrado na Figura x, temos que tais circunferências possuem a distância entre C_1 e C_2 igual à soma de seus raios.

Figura 70: Circunferências tangentes exteriores.

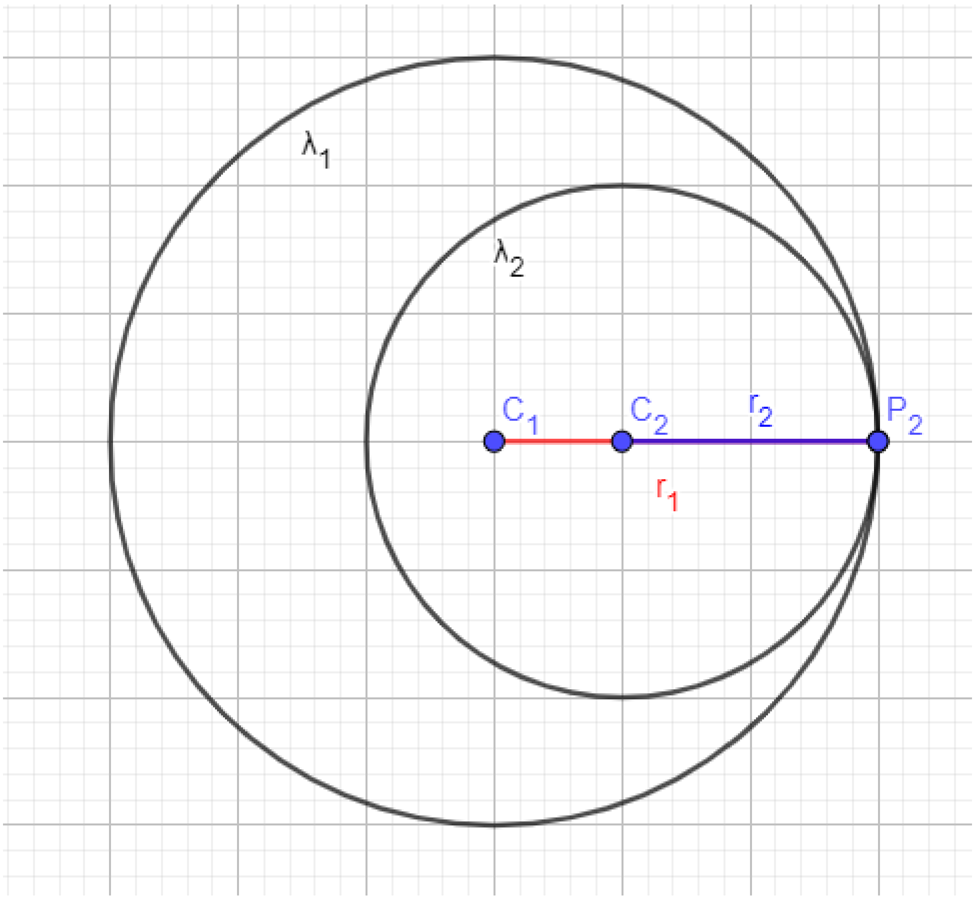


Fonte: Acervo dos autores

Tomando $r_1 = \overline{C_1P_1}$, $r_2 = \overline{C_2P_1}$, logo, como não nenhuma outra distância a ser considerada, a distância entre os pontos C_1 e C_2 é exatamente a soma $r_1 + r_2$, ou seja $d = r_1 + r_2$.

3°) Circunferências tangentes interiormente: como ilustrado na Figura x, temos que a distância entre os centros corresponde à diferença entre os raios r_1 e r_2, de forma que:

Figura 71: Circunferências tangentes interior.

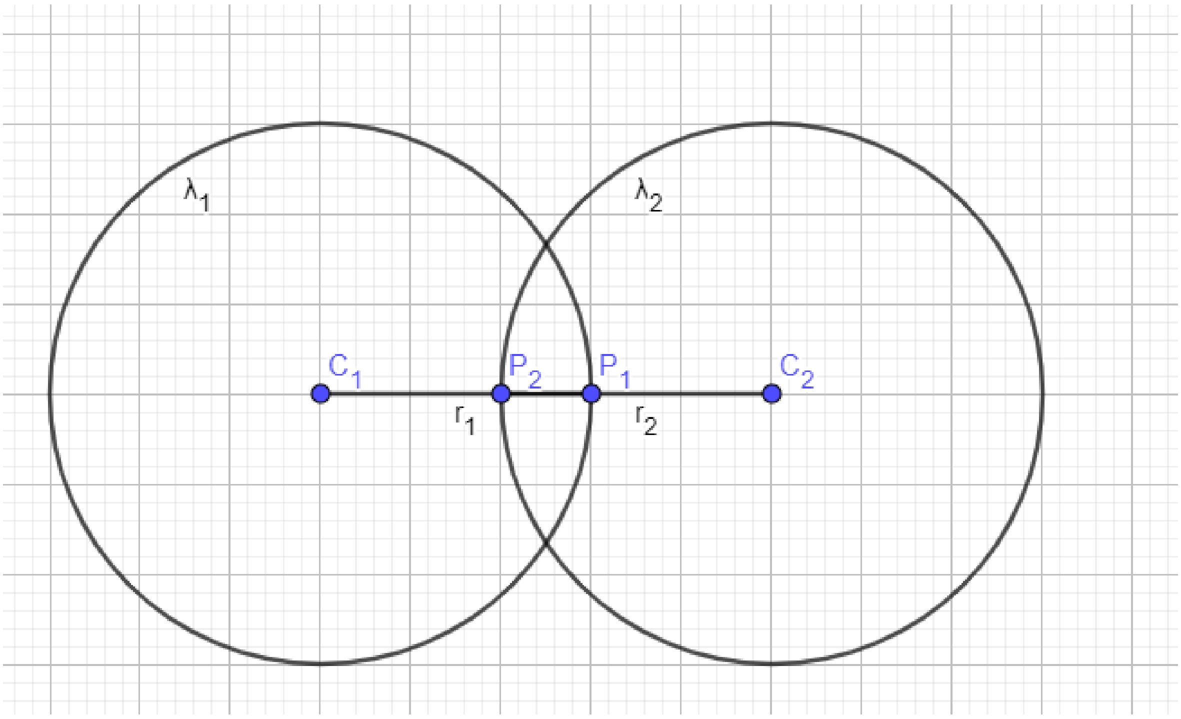


Fonte: Acervo dos autores

Tomando $r_1 = \overline{C_1P_1}$, $r_2 = \overline{C_2P_1}$, a distância entre os pontos C_1 e C_2 pode ser obtida subtraindo a medida dos raios r_1 e r_2, porém, para termos certeza que obteremos um valor positivo, utilizaremos o módulo da diferença, ou seja $d = |r_1 - r_2|$.

4°) Circunferências secantes: como ilustrado na Figura x, temos que a distância entre os centros está entre à diferença entre os raios r_1 e r_2, e a soma de r_1 e r_2, assim:

Figura 72: Circunferências secantes.

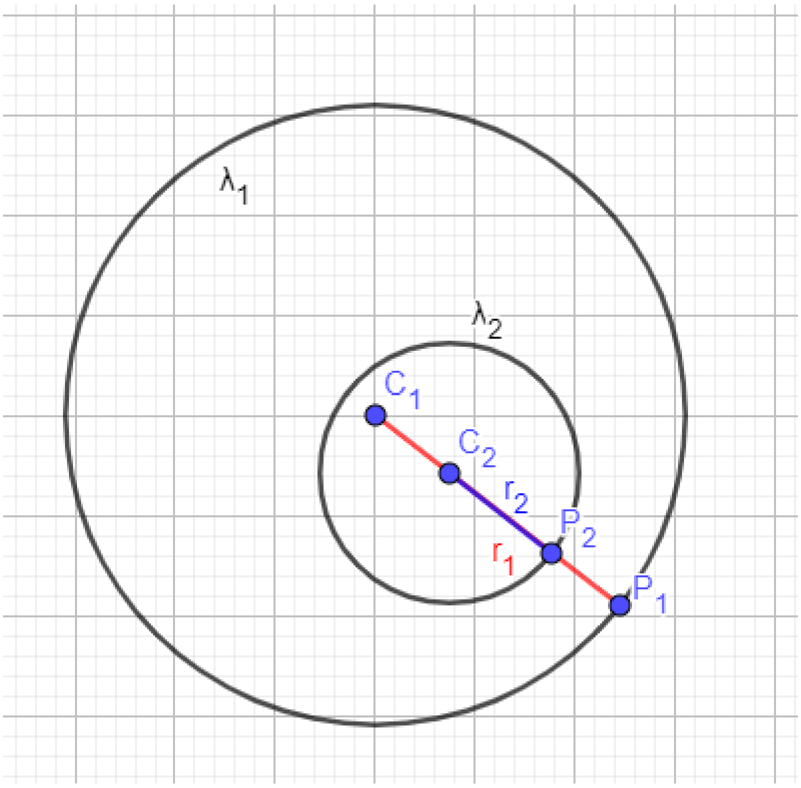


Fonte: Acervo dos autores

Tomando $r_1 = \overline{C_1P_1},$, $r_2 = \overline{C_2P_1}$ e a distância $\overline{P_1P_2}$ temos que a distância entre os pontos C_1 e C_2 pode ser obtida de duas formas subtraindo, a primeira é possível tomar a distância entre os centro como a soma dos raios r_1 e r_2, subtraído da distância $\overline{P_1P_2}$, o que nos dá que $d = \overline{C_1P_1}, + \overline{C_2P_1} - \overline{P_1P_2} < r_1 + r_2$, e a segunda toma-se a distância como a soma entre o r_1 e o segmento $\overline{P_1C}$, o que nos dá que $d = \overline{C_1P_1}, + \overline{P_1C} > |r_1 - r_2|$, assim, temos que $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$.

5°) Circunferência de menor raio interior à outra: como ilustrado na Figura x, temos que a distância entre os centros será menor que à diferença entre os raios r_1, r_2 e o segmento $\overline{P_1P_2}$, de forma que:

Figura 73: Circunferências de menor raio.

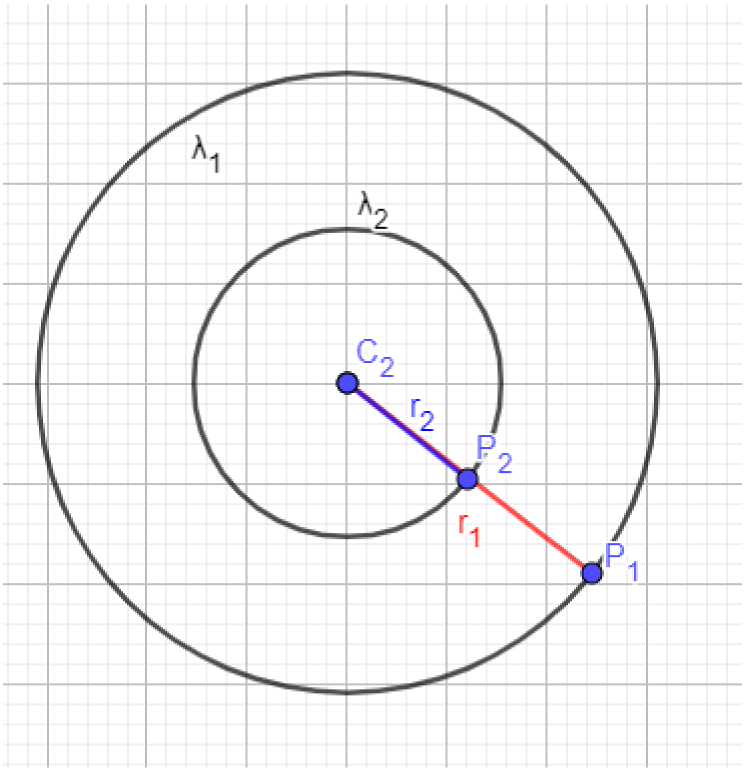


Fonte: Acervo dos autores

Tomando $r_1 = \overline{C_1P_1}$, $r_2 = \overline{C_2P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ temos que a distância entre os pontos C_1 e C_2 pode ser obtida subtraindo a medida dos raios r_1, r_2 e $\overline{P_1P_2}$, porém, para termos certeza que obteremos um valor positivo, utilizaremos o módulo da diferença, ou seja $d = \overline{C_1P_1} - \overline{C_2P_1} - \overline{P_1P_2} < |r_1 - r_2|$. Vale ressaltar que, a única diferença entre este e o caso 3 é que as circunferências não são tangentes.

6°) Circunferências concêntricas: como ilustrado na Figura x, temos que a distância entre os centros é nula, pois ambas têm o mesmo centro, porém com raios distintos.

Figura 74: Circunferências concêntricas.



Fonte: Acervo dos autores

Por fim, serão propostas as questões que seguem para os alunos resolverem. Espera-se que não haja muitas dúvidas relacionadas ao conteúdo estudado.

1 - (Unioeste - 2018 - Adaptado) Se (x_0, y_0) e (x_1, y_1) são os pontos onde os gráficos de $y^2 = -x^2 - 6x + 14$ e $y = 4x - 2$, então é correto afirmar que $a = x_0 + y_0$ e $b = x_1 + y_1$ é?

Resolução:

Substituindo a equação da reta na circunferência, temos:

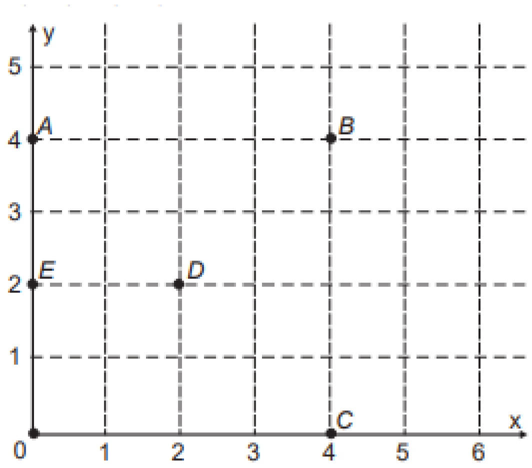
$$(4x-2)^2 = -x^2 - 6x + 14 \Rightarrow 14x^2 - 16x + 4 = -x^2 - 6x + 14 \Rightarrow$$

$15x^2 - 10x - 10 = 0 \Rightarrow x_0 = 1,12$ ***e*** $x_1 = -0,53$ ***e, consequentemente, temos que*** $y_0 = 2,46$ ***e*** $y_1 = -4,11$

Logo, $a = x_0 + y_0 = 1,12 + 2,46 = 3,58$ ***e***

$$b = -0,53 + (-4,11) = -4,64$$

(ENEM - Adaptado - 2018) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo, os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros" seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio de uma equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio de uma equação da reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale um ponto. Na situação de jogo representada pela imagem abaixo, qual das equações obtém-se a maior pontuação?



a) **x = 0**

b) **y = 0**

c) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 16}$

d) $\boldsymbol{x^2 + (y-2)^2 = 4}$

e) $\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8}$

Resolução:

a) 1 ponto

b) 2 pontos

c) 8 pontos

d) 2 pontos

e) 10 pontos

A última equação é a que se obtém maior quantidade de pontos

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos. Além disso, durante a resolução dos exercícios os alunos serão acompanhados e avaliados com base na compreensão do conteúdo e nas interações realizadas.

Referências:

DANTE. Roberto. **Tudo é Matemática**. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar -** Trigonometria, v.1, 8. ed. São Paulo: Atual. 2004.

4.6.1 Relatório de aula 6.

No dia vinte e cinco de junho de 2022, às 08 horas, iniciou-se os trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado II, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste-Campus Cascavel, com a atuação dos discentes no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT). Estavam presentes na aula os acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a aula, a professora orientadora Andréia Büttner Ciani e 12 alunos.

A aula iniciou com os estagiários questionando os alunos se eles haviam revistos, em extraclasse, os conteúdos apresentados na aula anterior. Para relembrar o conteúdo trabalhado na aula anterior foi realizado uma pequena revisão sobre a equação da reta, a equação reduzida da reta e os seus gráficos. Neste momento, quase a sala toda estava concentrada e procurando relembrar da aula anterior, com exceção de duas alunas que estavam conversando muito, o que acabava atrapalhando a aula. Após, considerando que na aula anterior não havia funcionado o projetor, os estagiários mostraram o comportamento da equação reduzida ao alterar os valores dos coeficientes angular e linear, mostrando a consequência dessas mudanças nos gráficos das respectivas retas.

Seguindo com o conteúdo, foi apresentado o conceito de retas paralelas, concorrentes e coincidentes e feito o seguinte questionamento aos alunos: "e algebricamente, como fazemos para identificar o tipo das retas que estamos trabalhando?", nesse momento a turma ficou em silêncio, sendo possível identificar que a turma não sabia como fazer. Foi comentado que para identificar o tipo de reta, é necessário realizar um sistema com as equações das retas que pretende-se identificar e após, realizar operações a fim de "sumir" com a variável x ou y. Um dos estagiários respondeu, rapidamente, de forma direta e então, uma das estagiárias comentou que achava que seria interessante realizar o passo a passo mais detalhadamente das contas para que os alunos pudessem acompanhar com mais facilidade e relembrar alguns conceitos básicos, como multiplicação e soma dentro de um sistema. O estagiário acatou a sugestão da outra estagiária e resolveu detalhadamente. Foi resolvido quando "sumia o x" e solicitado que os alunos fizessem quando "sumia o y".

Quando os alunos terminaram, foi questionado: "mas o que é esse sumir e o por que estamos realizando operações de modo que conseguíssemos chegar em uma equação sem o x ou o y?". Como nenhum aluno se pronunciou, foi explicado de modo que pudesse sanar as dúvidas e que os alunos consigam compreender o objetivo que é identificar o tipo de retas que se está trabalhando.

Na sequência, os alunos foram questionados se existia alguma semelhança entre as equações encontradas e uma aluna comentou que os termos $b_2a_1 - a_2b_1$ é igual a $-b_1a_2 + a_1b_2$ e que se a gente pensar, é o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} b_2 & a_2 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

Os estagiários comentaram que $c_1b_2 - c_2b_1$ é o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

e que $c_1a_2 - c_2a_1$ é o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Após, foi explicado sobre os casos do determinante, mais especificamente, o que acontece quando é SPD ou SPI ou ainda, SI. Enquanto os alunos foram para o intervalo, foi solicitado que os alunos relacionassem o que seria ser SPD, SPI ou SI com retas paralelas, concorrentes ou coincidentes e que isso seria debatido após eles voltassem.

Voltando do intervalo, os alunos foram questionados se haviam visto alguma relação e um aluno disse que SPI tem infinitos pontos em comum então era as retas coincidentes, se for SPD tem um único ponto em comum e as retas são concorrentes e se for SI, as retas são paralelas pois as não tem nenhum ponto em comum. A partir disso foram definidas as retas paralelas, concorrentes e coincidentes por meio da definição. Foi trabalhado ainda um caso da reta concorrente, a reta perpendicular.

Feito isso, os estagiários começaram a introduzir o conteúdo de circunferência, expondo no quadro a definição e explicando-a no plano, de forma que os alunos conseguissem enxergar o que a definição diz. Considerando que para trabalhar o conteúdo de circunferência, precisava relembrar o conceito da distância de dois pontos, rapidamente foi relembrado o conteúdo e relacionando com o raio da circunferência, e isto, com o intuito de mostrar que qualquer ponto que tiver a uma distância r (raio) do centro do círculo, pertence à circunferência.

Dando sequência à aula, foi deduzida a equação reduzida da circunferência no quadro e explicado sobre o que cada elemento representa na equação. Foi enfatizado que os elementos que são subtraídos de x e y correspondem a uma adaptação do referencial para se calcular a distância entre o centro e os pontos equidistantes dele. Foi feito em exemplo para encontrar o centro e o raio com base na equação reduzida $(x-1)^2+(y-1)^2=9$.

Em seguida, foi desenvolvido o conceito de equação geral da circunferência, que se resume a desenvolver a equação reduzida da reta, para isso, foi usado o exemplo anterior como base numérica para facilitar o entendimento dos alunos. Após isso, foi alertado para que os alunos tivessem atenção ao sinal das equações, pois na forma reduzida é utilizado o sinal negativo e na forma numérica é possível que tal valor seja negativo e, consequentemente, alterar o sinal. Para ilustrar tal situação, foi retomado os exemplos $(x-1)^2+(y-1)^2=9$ e dado um tempo para que os alunos construíssem ambas as equações vistas num plano cartesiano.

Após isso, um dos alunos foi ao quadro para representar ambas as equações no plano e após isso, antes do fim da aula, foi dado um exemplo de retas secantes, tangentes que não intersectam com a circunferência. Um aluno perguntou, ao fim da aula, sobre a diferença de equação reduzida e a equação na qual o raio fica aparente e se ambas tinham significados equivalentes, foi respondido que uma possa ser encontrada por meio da outra, podendo ser utilizadas em situações distintas, porém representam a mesma circunferência, sendo equações equivalentes distintos. Em seguida, foi anunciado o fim da aula pois já eram 11h 40min.

De modo geral, o plano de aula foi executado conforme planejado com algumas ressalvas, pois não foi possível abordar todo o conteúdo programado. Porém, fora isso, não ocorreram grandes imprevistos que contribuíram para uma mudança drástica na execução da aula. Pode-se concluir que a aula foi produtiva e satisfatória atendendo às expectativas.

4.7 Plano de aula 7 – Assíncrono.

Conteúdo: Análise combinatória.

Objetivo geral: Promover a compreensão de conceitos básicos relacionados à análise combinatória, tais como o teorema fundamental da contagem, espaço amostral e probabilidade.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o princípio fundamental da contagem, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender o conceito fundamental da contagem;
- Aplicar os conceitos e definições em questões propostas;
- Compreender as notações de Estatística utilizadas e seus significados;
- Compreender os conceitos estatísticos apresentados.

Tempo de execução:

Uma videoaula de 30 minutos.

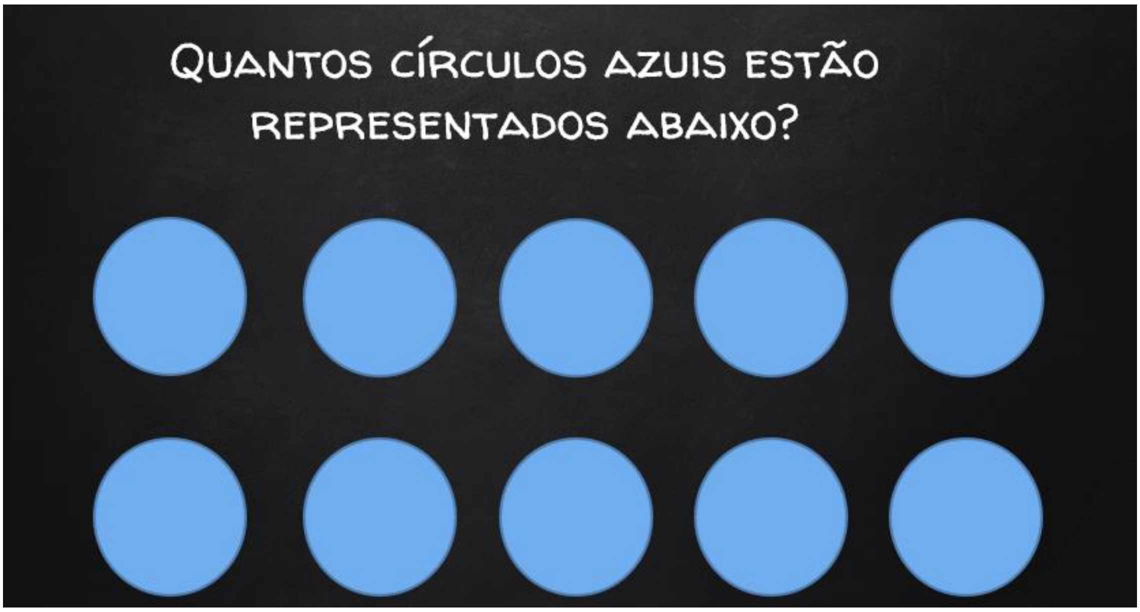
Recursos didáticos:

Software Microsoft PowerPoint.

Encaminhamento metodológico:

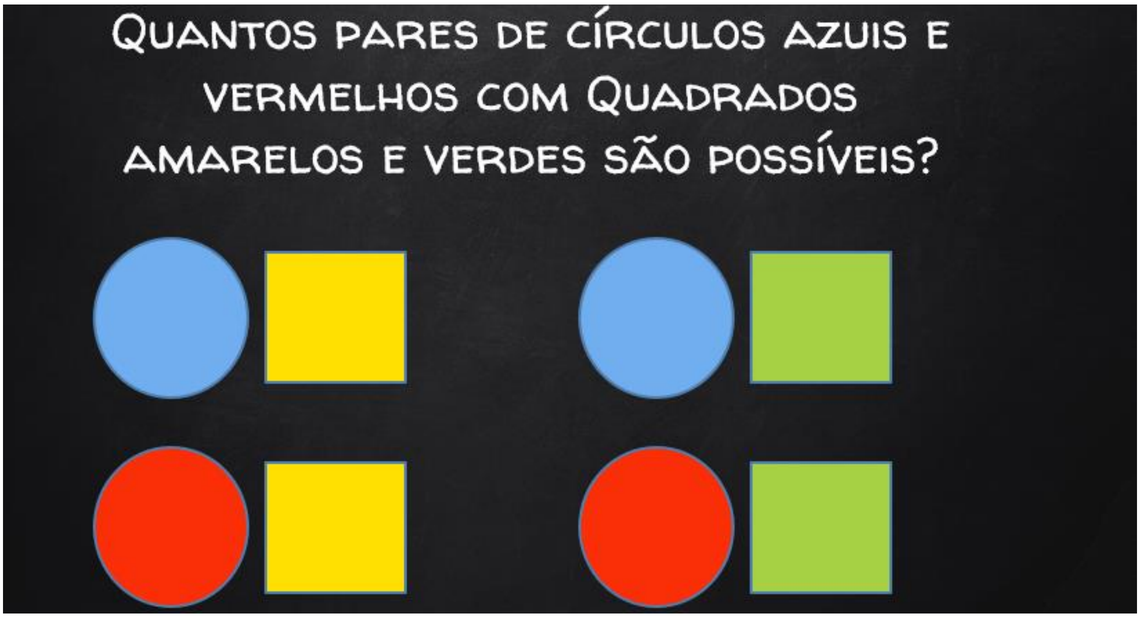
Primeiramente a vídeo aula será iniciada uma contextualização para os alunos do conteúdo a ser visto, comentando sobre a necessidade do desenvolvimento de métodos que permitam a contagem de elementos de um conjunto, e, para isso, foram criadas técnicas que criavam agrupamentos sob certas condições. Assim, inicialmente, serão feitas perguntas de contagem de elementos e de agrupamentos, como mostrado nas Figura x, para começar a introduzir os conceitos teóricos com base em contextos simples.

Figura 75: Pergunta de contagem.



Fonte: Acervo dos autores

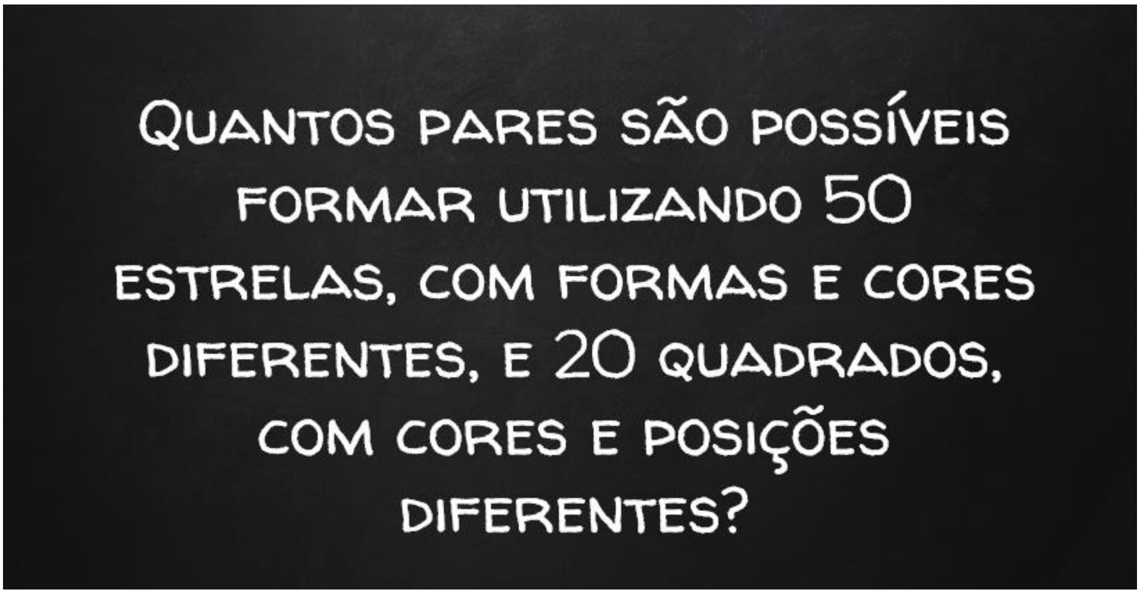
Figura 76: Pergunta de contagem.



Fonte: Acervo dos autores

Após isso, será feita uma pergunta de contagem de agrupamentos, como ilustrado pela Figura x, e a partir disso será evidenciado que, para conjuntos pequenos, é uma tarefa fácil fazer a contagem de elementos, porém para conjuntos maiores tal tarefa se torna extremamente trabalhosa, e que isso levou à criação de tais técnicas.

Figura 77: Pergunta de contagem.



Fonte: Acervo dos autores

Antes de iniciar a explicação do teorema fundamental da contagem, serão introduzidos alguns conceitos básicos sobre a estatística, tal como o **espaço amostral** representado por Ω e que representa os resultados possíveis, podendo ser finito ou infinito, **evento elementar** (x, w) que é um resultado de Ω e o **evento aleatório**, que é um subconjunto de Ω. Além disso, será comentado que para representar a quantidade, ou tamanho, de Ω, ou se um subconjunto A, utilizamos a notação n(A) = #A e n(Ω) = #Ω.

Após isso, será iniciada a explicação dos conceitos que servirão como base para o princípio fundamental da contagem, começando com os lemas que seguem.

Lema 1: Primeiramente, serão considerados os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, com base nisso, é possível formar m.n pares ordenados na forma (a_i, b_j), em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Demonstração: Para demonstrar tal afirmação, basta fixar o primeiro elemento do conjunto A, e variar o elemento de B, assim, temos que algumas das possíveis soluções são

(a_1, b_1);(a_1, b_2);...;(a_1, b_n), totalizando n pares ordenados

Continuando com tal lógica para os demais elementos de A, é possível encontrar m resultados semelhantes ao anterior, de forma que

(a_1, b_1);(a_1, b_2);...;(a_1, b_n), totalizando n pares ordenados
(a_2, b_1);(a_2, b_2);...;(a_2, b_n), totalizando n pares ordenados

.

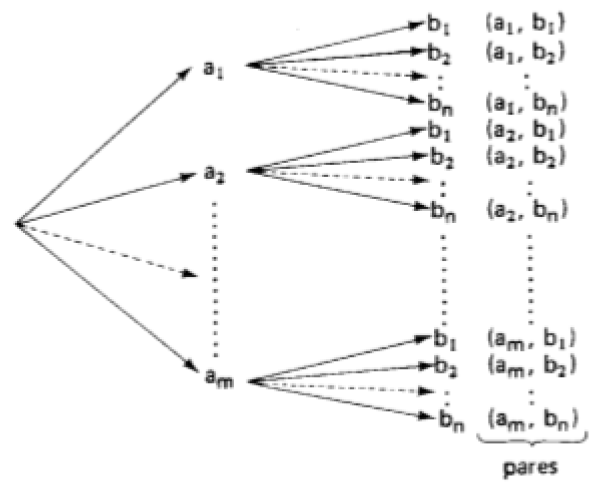
.

.

(a_m, b_1);(a_m, b_2);...;(a_m, b_n), totalizando n pares ordenados

Assim, a quantidade de pares ordenados possíveis corresponde a m.n pares.
Também será mostrado uma outra forma de visualizar a demonstração anterior, que é feita com base em um diagrama em forma de árvore como ilustrado abaixo.

Figura 78: Esquema de pares ordenados.



Fonte: Acervo dos autores

Lema 2: Primeiramente, será considerado apenas o conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, com base nisso, é possível formar m.(m-1) pares ordenados na forma (a_i, a_j), em que $a_i \in A$ e $a_j \in A$ e se $i \neq j$, então $a_i \neq a_j$.

Demonstração: De forma análoga ao raciocínio anterior podemos fixar um elemento a_i e variar entre os elementos a_j, porém, respeitando a restrição de que se $i \neq j$, então $a_i \neq a_j$, ou seja, não formando pares ordenados com subíndices iguais. Assim, ocorre que, dos m pares ordenados possíveis inicialmente, tiramos o par (a_i, a_i), restando m-1 pares ordenados, o que acarreta

(a_1, a_2);(a_1, a_3);...;(a_1, a_m), totalizando m-1 pares ordenados
(a_2, a_1);(a_1, a_3);...;(a_2, a_m), totalizando m-1 pares ordenados

.

.

.

(a_m, a_1);(a_m, a_2);...;(a_m, a_{m-1}), totalizando m-1 pares ordenados

E, consequentemente, são formados m.(m-1) pares ordenados.

Para ilustrar os conceitos vistos anteriormente, será feita uma dinâmica em que os alunos serão indagados sobre quantas possíveis combinações entre camisetas nas azuis, brancas e vermelhas e bermudas nas cores pretas e bege são possíveis.

Após isso, será enunciado o conceito do princípio fundamental da contagem, porém, para facilitar a compreensão, tal princípio será dividido em suas partes de acordo com a maneira que segue.

Teorema fundamental da contagem (Parte 1): Considerando r conjuntos de forma que:

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$ com n_1 elementos
$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\}$ com n_2 elementos

.

.

.

$Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{n_r}\}$ com n_r elementos

A quantidade de r-uplas ordenadas do tipo $(a_i, b_j, \ldots, z_p)$ onde $a_i \in A$,$b_j \in B$,...,$z_p \in Z$ é $n_1 . n_2 . \ldots . n_r$

Teorema fundamental da contagem (Parte 2): Considerando um conjunto a com m (m ≥ 2) elementos. Então o número de r-uplas ordenadas formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

m.(m-1).(m-2).....[m-(r-1)], com r fatores

Por fim, será proposta, e resolvida, a questão abaixo, para que os alunos tenham uma situação para basearem o conteúdo teórico visto.

1 - (ENEM - 2011) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de número em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75913 é

a) 24
b) 31
c) 32
d) 88
e) 89

Resolução:

Como os números foram gerados apenas com números ímpares, então os números foram construídos com o conjunto {1,3,5,7,9}. Como queremos saber a posição do candidato com número 75913, precisamos descobrir a quantidade de números que foram construídos antes dele. Assim, temos que:

1 $\underline{4}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ = 24

3 <u>4</u> <u>3</u> <u>2</u> <u>1</u> = 24

5 <u>4</u> <u>3</u> <u>2</u> <u>1</u> = 24

7 1 <u>3</u> <u>2</u> <u>1</u> = 6

7 3 <u>3</u> <u>2</u> <u>1</u> = 6

7 5 1 <u>2</u> <u>1</u> = 2

7 5 3 <u>2</u> <u>1</u> = 2

7 5 9 1 3

Assim, temos a quantidade de posições anteriores a 75913 sendo iguais a 24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 = 88, logo há 88 números anteriores à 75913, consequentemente, tal número está na posição 89.

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos. Além disso, durante a resolução dos exercícios os alunos serão acompanhados e avaliados com base na compreensão do conteúdo e nas interações realizadas.

Referências:

DANTE. Roberto. **Tudo é Matemática**. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar - Trigonometria** - v.1, 8. ed. Editora: Atual. 2004.

4.7.1 Relatório de aula 7

No primeiro dia de julho de 2022, foi encaminhado aos alunos a sétima aula do Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT), trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado II, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste - Campus Cascavel. Essa aula ocorre de maneira assíncrona, publicada na plataforma de compartilhamento de vídeo *YouTube*. O conteúdo trabalho foi o Princípio Fundamental da Contagem

Os discentes Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin gravaram a aula juntos utilizando a ferramenta do *Microsoft Power Point*, na qual é possível gravar o conteúdo presentes dos *slides* com áudio. Foi possível reunir todos os acadêmicos o que facilitou que não ocorresse o problema da aula assíncrona anterior, na qual o áudio do vídeo ficou com intensidades diferentes. O vídeo tem ao todo 25 minutos, dos quais 15 minutos referem-se à explicação dos conceitos sobre a contagem e o restante foi destinado à resolução de exercício.

Toda a aula ocorreu como planejado, pois caso ocorressem erros era possível realizar novamente a gravação. Durante a explicação foram realizadas perguntas retóricas com o objetivo de gerar uma imersão de quem estivesse assistindo. A aula está disponível pelo *link:* https://www.youtube.com/watch?v=w1uGmflI0sY.

4.8 Plano de aula 8 – 02/07.

Conteúdo: Análise combinatória.

Objetivo geral: Promover a compreensão de conceitos básicos relacionados à Análise Combinatória, tais como Arranjo, Combinação e Permutação.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com os conceitos de Arranjo, Combinação e Permutação, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender a relação de tais conceitos entre si e entre o conceito fundamental da contagem;
- Entender as deduções feitas ao longo da aula;
- Resolver as questões propostas utilizando os conteúdos vistos até o momento;
- Distinguir as características entre Arranjo, Permutação e Combinação;
- Compreender em quais contextos cada conceito deve ser utilizado.

Tempo de execução:

Um encontro de 3 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Giz, lousa, projetor, lâminas e folha impressa com exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente, os alunos serão questionados se assistiram à vídeo aula assíncrona que foi proposta. Caso haja alunos que não tenham visto a aula encaminhada anteriormente apresentaremos a eles que, para aprender a organizar e a contar muitas possibilidades, exige-se formas adequadas para ordenar as informações e essas formas se traduzem por situações de contagem.

Após isso, será comentado que a Análise Combinatória analisa dados e tenta quantificá-los para avaliar tendência e tomar decisões, mais especificamente, realiza a contagem organizada de grande número de dados. Para exemplificar algumas situações, os alunos serão questionados com as perguntas "quantos números de telefones podem ser feitos com dois algarismos?", "quantas placas de automóvel são possíveis formar usando-se três letras e quatro algarismos?" e "quantas senhas bancárias podem ser criadas com seis caracteres, sendo pelo menos dois deles letras e pelo menos um deles sendo um algarismo?". Com tais perguntas, espera-se que os alunos compreendam a problemática envolvida na obtenção de tais respostas, assim, será feito o exemplo abaixo para ilustrar o princípio fundamental da contagem.

Suponha que você tenha 4 camisas, uma branca (b), uma azul (a), uma preta (p) e uma vermelha (v), e 3 calças, uma preta (P), uma branca (B) e uma azul (A). De quantas maneiras diferentes você pode se vestir usando uma camisa e uma calça?

Assim, os alunos serão indagados sobre como obter a solução de tal pergunta, caso não haja interação, será construído tal cenário por meio de um diagrama de árvore para facilitar a resolução e a compreensão do problema. Após isso, espera-se que os alunos consigam resolver a questão e por meio dela, será definido o princípio fundamental da contagem da forma abaixo.

Teorema fundamental da contagem (Parte 1): Considerando r conjuntos de forma que:

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$ com n_1 elementos

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\}$ com n_2 elementos

.

.

.

$Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{n_r}\}$ com n_r elementos

A quantidade de r-uplas ordenadas do tipo $(a_i, b_j, \ldots, z_p)$ onde $a_i \in A$,$b_j \in B$,...,$z_p \in Z$ é $n_1.n_2.\ldots.n_r$

Teorema fundamental da contagem (Parte 2): Considerando um conjunto a com m (m ≥ 2) elementos. Então o número de r-uplas ordenadas formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

m.(m-1).(m-2).....[m-(r-1)], com r fatores

Seguindo com o conteúdo, será comentado que, além do princípio fundamental da contagem, existem algumas outras técnicas de contagem, sendo uma delas o Arranjo. Assim, inicialmente será apresentado o conceito de Arranjo, que tem como característica a importância na ordem que os elementos aparecem, com base na definição que segue.

Definição: Tomando um conjunto A, com m elementos, de forma que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, chama-se de arranjo com repetição de m elementos, tomados r a r, (1 < r ≤ m) toda r-upla ordenada formada com os elementos de A que não são necessariamente distintos.

Assim, de forma geral, para uma sequência com r elementos, para cada posição, é possível ter m possibilidades de elementos distintos, pois A tem m elementos. Assim, como os elementos podem ser repetidos, a quantidade de sequências a serem formadas é m.m.m….m r vezes, ou seja, são possíveis m^r sequências. Representando de forma simbólica, $AR_{m,r} = m^r$, em que AR representa um arranjo com reposição.

De forma análoga há a definição de arranjo sem reposição, ou arranjo simples, em que:

Definição: Tomando um conjunto A, com m elementos, de forma que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, chama-se de arranjo dos m elementos, tomados r a r, (1 < r ≤ m) toda r-upla ordenada formada com os elementos de A todos distintos.

Assim, de forma análoga, para uma sequência com r elementos, para a primeira posição, é possível ter m possibilidades de elementos distintos, pois A tem m elementos, para a segunda posição, como não se pode repetir o último elemento há apenas (m-1) elementos possíveis, e assim sucessivamente. Assim, a quantidade de sequências a serem formadas em um arranjo simples é m.(m-1).(m-2)….(m-(r-1)). Representando de forma simbólica, $A_{m,r} = m.(m-1).(m-2) \ldots\ldots (m-(r-1))$, em que $A_{m,r}$ representa um arranjo simples.

Além da representação anterior é possível escrever a expressão de um arranjo simples por meio da fórmula.

$$A_{m,r} = m.(m-1).(m-2) \ldots\ldots (m-(r-1)).\frac{(m-r).(m-r-1).\ldots.3.2.1}{(m-r).(m-r-1).\ldots.3.2.1}$$

$$= \frac{m!}{(m-r)!}$$

Em seguida, será utilizado a representação de arranjo trabalhada anteriormente como base para abordar o conceito de número fatorial, que estará presente nos demais conteúdos, e, para isso, será definido o conceito de número fatorial na forma que segue.

Definição: Dado m um número não negativo, define-se o fatorial do número m, e representado por m!, por meio da relação

m! = m.(m-1).(m-2)….3.2.1

1! = 1

0! = 1

Após isso, será abordado um caso específico do arranjo, chamado de permutação, que tem como característica a utilização de todos os elementos do conjunto. Espera-se que por se tratar de um caso específico do arranjo os alunos consigam compreender o conceito sem muitos problemas, assim, será definido o conceito de permutação com base na seguinte definição.

Definição: Tomando um conjunto A, com m elementos, de forma que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, chama-se de permutação dos m elementos, todo arranjo em que r = m.

Dessa forma, uma permutação do conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ é indicada como P_m e temos que $P_m = A_{m,m}$, ou seja,

$$P_m = m.(m-1).(m-2).\ldots.3.2.1$$

Após isso, será introduzido outra técnica de encontrar sequências de elementos, sendo ela o conceito de combinação simples, que possui como característica que a ordem em que o elemento aparece não importa. Para facilitar a compreensão, será partido de um arranjo simples e, por meio dele, será construída a relação para encontrar o número de combinações possíveis. Espera-se que os alunos consigam distinguir entre as características de ambos os métodos e compreendam o motivo de utilizarem expressões distintas.

Definição: Tomando um conjunto A, com m elementos, de forma que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, chama-se de combinação dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de r elementos.

Assim, em comparação ao arranjo simples, não importa a posição em que o elemento apareça, basta que ele esteja presente na sequência. Isso acarreta que, todas as sequências em que o elemento aparece em diferentes posições são consideradas como sequências repetidas, ou seja, tomando os arranjos de tais elementos, de forma que

$$A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Acaba-se considerando a mesma sequência de elementos r! vezes, assim, a quantidade de combinações é dada por

$$C_{m,r} = \frac{A_{m,r}}{r!} = \frac{\frac{m!}{(m-r)!}}{r!} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}$$

Seguindo com o conteúdo, com base nos demais conteúdos trabalhados, será apresentado, por fim, o conceito de permutação com repetição. Tal conceito será abordado com base na construção de anagramas, para facilitar a compreensão do conteúdo e para permitir uma correlação com o conteúdo de combinação simples visto anteriormente. Assim, o conceito de permutação com repetição de elementos será abordado com base na definição que segue.

Permutação com repetição de elementos: Foi visto anteriormente que, ao formar uma permutação com elementos diferentes, utiliza-se a fórmula $P_m = m.(m-1).(m-2).....3.2.1$. Porém, caso ocorra a repetição de elementos, tal expressão se torna incorreta, por exemplo, ao formar uma permutação com as letras da palavra ANA, que é também chamado por anagrama, de forma que o segundo A será indicado por A*, há as possibilidades

ANA*; A*NA; AA*N; A*AN; NAA*, NA*A. Porém, ao tirar tal diferenciação do segundo A, os anagramas obtidos são
ANA; ANA; AAN; AAN; NAA, NAA
Ou seja, existem repetições de anagramas, de forma que, das 6 permutações possíveis, apenas 3 são diferentes.

Assim, por um elemento se repetir 2 vezes, a quantidade de permutações totais foi dividida por dois, de forma análoga, é possível afirmar que numa permutação com n elementos, com α_1 repetições, o número de permutações é $PR_n^{\alpha_1} = \frac{n!}{\alpha_1!}$, e caso haja mais de um elemento sendo repetido, a expressão é adaptada para $PR_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!}$.

Por fim, serão propostas as seguintes questões para os alunos pensarem e resolver. Espera-se que consigam relacionar os conceitos vistos ao longo da aula em cada questão e utilizem o conceito necessário para resolução.

1 - (ENEM - 2021) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas. A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$

b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$

c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$

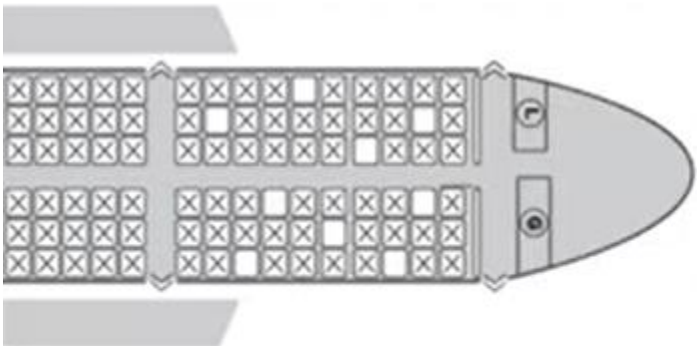
d) $\frac{6!}{2!} \frac{15!}{5!}$

e) $\frac{21!}{7!14!}$

Resolução:

$$C_6^2 . C_{15}^5 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} . \frac{15!}{5!\,(15-5)!} = \frac{6!}{2!\,4!} . \frac{15!}{5!\,10!}$$

2 - (ENEM - 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $\frac{9!}{7!.2!}$

c) $7!$

d) $\frac{5!}{2!} . 4!$

e) $\frac{4!}{2!} . \frac{4!}{3!}$

Resolução:

Como a ordem das posições importa, é necessário utilizar a expressão do arranjo, de forma que

$$\boldsymbol{A_{9,7} = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}}$$

3 - (ENEM - 2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2!8!} - \frac{4!}{2!2!}$

b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

c) $\frac{10!}{2!8!} - 2$

d) $\frac{6!}{4!} - 4.4$

e) $\frac{6!}{4!} - 6.4$

Resolução:

Para resolver tal solução, como a restrição é que não sejam ambos os jogadores canhotos, podemos fazer a combinação de todos os tenistas, pois a ordem em que eles jogarão não importa, e subtrair as opções em que ocorrem ambos são canhotos. Assim,

$$\boldsymbol{C_{10,2} - C_{4,2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} - \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{10!}{2!\,8!} - \frac{4!}{2!\,2!}}$$

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos. Além disso, durante a resolução dos exercícios os alunos serão acompanhados e avaliados com base na compreensão do conteúdo e nas interações realizadas.

Referências:

DANTE. Roberto. **Tudo é Matemática**. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar - Trigonometria** - v.1, 8. ed., São Paulo: Atual. 2004.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**: Ensino Médio. v.1. São Paulo: Saraiva, 2014.

4.8.1 Relatório de aula 8

No dia dois de julho de 2022, às 08 horas, iniciou-se os trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado II, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste-Campus Cascavel, com a atuação dos discentes no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT). Estavam presentes na aula os acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a aula, o professor orientador Felipe e 15 alunos, além de um cachorro que entrou na sala e ficou presente durante toda a aula.

A aula foi iniciada desenhando uma circunferência no quadro e relembrando os conceitos iniciais de circunferência vistos na última aula, dentre eles a definição de uma circunferência, envolvendo a distância entre os pontos da circunferência e do centro ser igual para todos os pontos e ainda, a equação reduzida da circunferência. Após isso, na circunferência desenhada foram nomeados, por A, B e D, alguns pontos e foi indagado aos alunos o que tais pontos representavam em relação à circunferência. Um aluno comentou que o ponto D estava dentro do círculo. Após isso, os alunos foram indagados novamente sobre o que isso significa. Depois de um certo tempo com a turma em silêncio, um aluno respondeu que a distância entre o ponto B e o centro da circunferência era menor que o raio. Assim, foi escrito no quadro tais características para os pontos que estavam internos à circunferência, como o ponto D, estavam sobre a circunferência, como o A, e exteriores à circunferência, como o ponto B.

Continuando com o conteúdo, foi iniciada a abordagem do conceito de posição relativa entre a circunferência e uma reta, que foi abordado, inicialmente, propondo que os alunos representassem em seus cadernos o exemplo numérico $(x-2)^2+(y-1)^2=16$ e $y=2x+6$. Durante o tempo destinado para que os alunos fizessem a atividade proposta os acadêmicos passaram de carteira em carteira auxiliando os alunos com suas dúvidas. Foi observado que os alunos tiveram dúvidas em reconhecer as características das equações apresentadas, principalmente na construção da circunferência e, consequentemente, na intersecção dela com a reta.

Após uns 20 minutos foi desenhado no quadro um plano cartesiano e, com base nele, foi construída a circunferência e a reta, mostrando que aparentemente, a olho nu, havia a possibilidade de uma intersecção entre elas num único ponto, de forma que a reta seria tangente à circunferência. Continuando com a explicação, foi comentado sobre a característica do coeficiente angular da equação reduzida da reta, em que, no exemplo dado, para cada unidade de variação nos eixos x e y varia 2 unidades. Os alunos tiveram um pouco de dificuldade, porém, com as explicações dos estagiários disseram que foi possível compreender o conceito

Foi comentado que além desse tipo de equação existem retas que interceptam a circunferência em mais de 1 pontos, chamadas de secante, e retas que não interceptam a circunferência em nenhum ponto, chamadas de exteriores. A partir do exemplo anteriormente proposto, foi começado a generalização dos possíveis casos, para isso, foi realizada uma breve revisão do conceito de funções quadráticas e como encontrar seu zero para, em seguida, executar o método de substituição no exemplo dado. Ao fazer a substituição foi obtida uma equação quadrática que foi resolvida pela fórmula resolutiva de Bhaskara.

Durante a resolução da equação os alunos foram indagados sobre as contas realizadas, porém não houve muita participação, foi indagado se eles conseguiam fazer as contas de cabeça e um aluno respondeu que não e então foi explicado uma maneira de fazer o cálculo mental. Após isso, foi terminada a resolução e foi analisado que, como o delta é negativo, a reta não intersecta a circunferência, evidenciando que, muitas vezes a reta e o círculo podem estar muito pertos ao ponto de que, a olho nu parecem se interceptar e daí, entende-se a necessidade de fazer os cálculos para comprovar se o círculo e a reta realmente se interceptam.

Após isso, foi evidenciado que, seguindo tal lógica, quando delta é igual a zero a circunferência é tangente e se o delta é maior que zero a reta é secante.

Ao fim da explicação, foi continuado com conteúdo, sendo analisadas as posições relativas entre duas circunferências. Para isso, foram desenhadas duas circunferências no quadro, para ilustrar o primeiro caso, em que a distância entre os centros é maior que a soma dos raios.

Nesse momento, os alunos foram indagados sobre a distância entre tais circunferências. Houve uma boa interação por parte dos alunos, que perceberam que a distância entre elas era um pouco maior do que a distância entre os centros. Assim, para demonstrar tal situação, foi calculada a distância entre os centros utilizado o teorema de Pitágoras.

Por fim, foi generalizada a ideia vista até o momento, de forma que, foi evidenciado que se a distância entre os centros fosse menor que a soma dos raios, das circunferências se intersectam em dois pontos, se é igual elas são tangentes e se são maiores então elas não se intersectam. Com isso, foi encerrado o conteúdo de geometria analítica.

Enquanto os alunos copiavam os conceitos, os alunos foram indagados se haviam assistido ao vídeo da aula encaminhado anteriormente. Alguns poucos alunos disseram que assistiram, porém, a grande maioria não assistiu ao vídeo aula.

No entanto, foi começada a introdução de alguns conceitos que seriam vistos futuramente, tal como espaço amostral, evento elementar e evento aleatório. Antes de liberar os alunos para o intervalo, foi começado a introduzir os conceitos básicos do princípio fundamental da contagem. Para exemplificar tais conceitos, foram dados alguns exemplos de probabilidade, como a chance de tirar um rei de ouro do baralho e todas as possibilidades no lançamento de duas moedas.

Após o intervalo foi retomada a explicação dos conceitos vistos anteriormente e, para ilustrar tal conceito, foi feito o seguinte exemplo. "João tem 2 camisetas, 4 calças e 3 meias. De quantas maneiras João pode se vestir?". Para resolver tal exemplo, foi feito o diagrama de árvore com as possibilidades, durante a resolução um aluno chamou atenção que a quantidade de possibilidades possíveis pelo diagrama, e correspondente à multiplicação entre 2, 4 e 3. Foi respondido que, em breve, seria dado ênfase sobre o motivo de tal correspondência. Para isso, foi explicado sobre a possibilidade de fixar outros elementos presentes na árvore e, com intuito de generalizar tal conceito, foi aumentado a quantidade de calças, meias e camisas no exemplo para mostrar que para casos simples é possível utilizar o diagrama de árvore, mas que, para conjuntos maiores, tal método seria muito trabalhoso. A partir disso, foi introduzido o princípio fundamental da contagem com base no plano de aula e correlacionando com o exemplo dado.

Na sequência, foi dado um tempo para os alunos calcularem quantas possibilidades seriam possíveis caso João tivesse 25 camisetas, 7 calças e 42 meias. Eles encontraram 7350 possibilidades de João se vestir.

Continuando com o conteúdo, foi visto a segunda parte do princípio fundamental, tomando como exemplo, as possibilidades de 3 pessoas se sentarem em 3 lugares. Os alunos foram indagados se o princípio funcionaria exatamente como nos outros casos, foi respondido que sim, mas logo em seguida, foi indagado se uma mesma pessoa poderia sentar-se em mais de um lugar ao mesmo tempo e os alunos responderam que não. Um aluno comentou que sempre multiplicava os valores que apareciam na questão, uma estagiária perguntou o que ele faria se aparecesse apenas um valor, por ter apenas um conjunto e ele disse "não faria" e completou "mas agora eu sei como fazer". Considerando que a turma relatou ter compreendido, foi dado sequência ao conteúdo.

Seguindo com o conteúdo, foi apresentado o conceito de arranjo. Foi explicado que o arranjo é utilizado para trabalhar com sequências onde a ordem importa. Para exemplificar, foi utilizado a ideia dos números de celular, onde o único número que é fixo é o primeiro nove. Ao questionar os alunos sobre qual seriam as possibilidades dos próximos números, uma aluna respondeu que seria 10 na segunda casa, 9 na terceira e assim sucessivamente. Os estagiários comentaram que isso aconteceria se todos os números do telefone obrigatoriamente tivessem que ser diferentes, o que não é o nosso caso. Outro aluno comentou que em cada casa seriam 10 possibilidades e os estagiários comentaram que estava correto e continuaram a explicação. Logo na sequência, outra aluna questionou o que aconteceria se fosse fixado os dois primeiros números, e os estagiários refizeram o exemplo fixando as duas primeiras casas do número. Para a melhor compreensão dos alunos, foi realizado mais um exemplo, utilizando as cartas de um baralho físico. Foi comentado com os alunos que no caso do número telefônico a ordem importa e, para exemplificar, foram expostos dois números no quadro: 912345678 e 912345687 e questionado aos alunos se os dois números eram iguais e os alunos responderam que não. Foi comentado que, quando isso acontece, é por ser um Arranjo, sendo que, em se tratando de um Arranjo, a ordem que os componentes importam, ou seja, se discar esses dois números cairá em duas pessoas diferentes. Após isso foi definido Arranjo e demonstrada a fórmula juntamente com os alunos. Foi definido Arranjo com permutação e Arranjo simples.

Na sequência foi definido o que seria um fatorial e em seguida, iniciou-se a parte introdutória de permutação. Considerando que a aula estava no fim, os alunos foram avisados que seria dado continuidade no conteúdo na próxima aula.

De modo geral o plano de aula foi executado conforme planejado com algumas ressalvas, pois não foi possível abordar todo o conteúdo programado. Porém, fora isso, não ocorreram grandes imprevistos que contribuíssem para uma mudança drástica na execução da aula. Concluiu-se que a aula foi produtiva e satisfatória atendendo às expectativas.

4.9 Plano de aula 9 – 09/07.

Conteúdo: Probabilidade.

Objetivo geral: Promover a compreensão de conceitos básicos relacionados à Probabilidade, tais como Espaço Amostral, Eventos Aleatórios, Experimentos Aleatórios e Frequência Relativa.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com os conceitos de arranjo, combinação e permutação, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender os conceitos de Espaço Amostral, Eventos Aleatórios, Experimentos Aleatórios e Frequência Relativa;
- Correlacionar os conceitos abordados com as questões e exemplos propostas;
- Resolver as questões propostas;
- Compreender as características e propriedades dos conteúdos Frequência Relativa e Probabilidade.

Tempo de execução:

Um encontro de 3 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Giz, lousa, projetor, lâminas e folha impressa com exercícios.

Encaminhamento metodológico:

A aula será iniciada com o aprofundamento dos conceitos de probabilidade vistos nas aulas anteriores, sendo, inicialmente, abordado a realização de experimentos aleatórios, eventos aleatórios e o espaço amostral de tais experimentos como definidos a seguir.

Experimentos aleatórios são experimentos que produzem resultados diferentes a cada realização, mesmo em condições idênticas. Normalmente não é possível saber o resultado, mas é possível descrever todos os resultados possíveis de ocorrência. As variações nos experimentos ocorrem devido a condições que não se podem controlar, chamadas de acaso.

Espaço amostral são todos os resultados possíveis em um experimento aleatório, normalmente representado por Ω. Além disso, dizemos que um espaço amostral é finito se, $\#\Omega = M \in IN^*$, caso contrário, dizemos que Ω é infinito.

Evento: Ao considerarmos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω, chamamos de evento todo subconjunto de Ω. Normalmente são usadas as letras A, B, C, …, Z para representar um evento. Dizemos que um evento A ocorre se, ao realizar o experimento, o resultado obtido for pertencente a A. Quando o evento possui um único elemento, chamamos de eventos elementares.

Após a definição formal de tais conceitos, para facilitar a compreensão de tais conceitos, serão escritos no quadro exemplos de probabilidade clássicos, como o lançamento de moedas e de dados, escritos abaixo para questionar os alunos sobre a aparição dos conteúdos vistos anteriormente.

a) Quais as possibilidades ao lançar uma moeda duas vezes e observar a sequência de caras (C) e coroas (K)?

$\Omega = \{(K,C); (K,K); (C,K); (C,C)\}$

b) Qual o espaço amostral obtido ao lançar uma moeda até ocorrer uma cara (K) pela primeira vez?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

c) Ao lançar um dado e observar o número da face de cima, quais as possibilidades possíveis?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

No espaço amostral do experimento anterior, quais são as possibilidades dos eventos abaixo?

A ocorrência de um número ímpar $A = \{1, 3, 5\}$

A ocorrência de um número menor que 4 $B = \{1, 2, 3\}$

A ocorrência de um número maior que 7 $C = \emptyset$

Após escrever tais exemplos no quadro, os alunos serão questionados sobre a aparição dos elementos de Evento Aleatório, Espaço Amostral e Evento nos exemplos dados. Espera-se que os alunos tenham algumas dúvidas em alguns exemplos, ou determinado conteúdo, mas que, com a variedade de exemplos e de explicações, tais dúvidas sejam resolvidas.

Continuando com o conteúdo, será abordado o conceito de Frequência Relativa, que consiste na repetição de um experimento N vezes e observar quantas vezes o evento de interesse ocorre. Da mesma maneira que os conteúdos anteriores, o conteúdo será abordado juntamente com um exemplo, para facilitar a compreensão do conteúdo, que será definido da maneira que segue.

Frequência relativa: Num experimento aleatório, não se sabe qual evento ocorreu, mas é possível saber quais ocorreram com mais frequência do que outros. Para isso, busca-se relacionar tais eventos com uma indicação quantitativa da ocorrência deles, chamada de frequência relativa.

Considerando o espaço amostral Ω, finito, de forma que $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ e a repetição de tal experimento um número N de vezes, todos nas mesmas condições. Se um evento a_i ocorreu um número de vezes n_i, então a frequência relativa do evento $\{a_i\}$ é dada por f_i, de forma que

$$f_i = \frac{n_i}{N} \ \forall \ \mathrm{i} \in \{1, 2, 3, \cdots, \mathrm{k}\}$$

Será utilizado o exemplo que segue para ilustrar o conceito de Frequência Relativa, de forma que os alunos possam relacionar o conceito teórico a uma situação que pode ser realizada em seu cotidiano. Além disso, será evidenciado que a Frequência Relativa não é um número absoluto, pois pode mudar conforme a quantidade de repetições do experimento aumenta, porém, tem a tendência de "congelar" em um número grande de repetições. Espera-se que a utilização do exemplo contribua para o entendimento do conteúdo e de sua utilização e que, assim, os alunos não tenham dúvidas sobre o conteúdo.

No lançamento de um dado 100 vezes é observado a ocorrência do número 2 18 vezes, então a frequência relativa desse evento é de

$$\boldsymbol{Fr = \frac{18}{100} = 0,18}$$

Após isso, serão evidenciadas algumas propriedades da Frequência Relativa, sendo elas:

1) $0 \leq f_i \leq 1 \ \forall$ i, pois $0 \leq \frac{n_i}{N} \leq 1$

2) $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k = 1$, pois $\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_k}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{N} = \frac{N}{N} = 1$

Juntamente com o conceito de Frequência Relativa será trabalhada a definição de Probabilidade, da maneira que segue, juntamente com alguns exemplos. Espera-se que os alunos consigam compreender ambos os conteúdos sem muitas dificuldades por se tratar de conceitos mais usuais e normalmente vistos no cotidiano.

Definição de Probabilidade: A frequência relativa disponibiliza uma informação para quantificar a ocorrência de um dado evento que é realizado muitos vezes. A partir disso, será definido um número a ser associado a cada evento, de forma que esteja perto da frequência relativa, chamado de probabilidade do evento.

Considerando o espaço amostral Ω, finito, de forma que $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Para cada evento elementar $\{a_i\}$ associa-se um número real, indicado por $p(\{a_i\})$ ou p_i, chamado de probabilidade do evento $\{a_i\}$, de forma que tal número satisfaça as propriedades:

1) $0 \leq p_i \leq 1 \ \forall$ i ∈ {1, 2, 3, ⋯, k}

2) $\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = 1$

Além disso, define-se a probabilidade de ocorrer um evento A de Ω de forma que:

a) Se A = Ø, então P(A) = 0

b) Se A ≠ Ø, então $P(A) = \sum_{a_i \in A}^{k} p_i$

Assim, a probabilidade de ocorrer um evento A é a soma das probabilidades dos resultados individuais constituintes do evento A.

Em seguida, será discutido o exemplo que segue com os alunos, espera-se que consigam compreender a utilização de Probabilidade sem muitos problemas por ser uma continuação do conceito de Frequência Relativa.

Tomando um espaço amostral $\boldsymbol{\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}}$ com a probabilidade de cada evento sendo, respectivamente, $\boldsymbol{p_1 = 0,1, p_2 = 0,3, p_3 = 0,3,\ p_4 = \ 0,4}$. A probabilidade do evento $\boldsymbol{A = \{a_1, a_2, a_4\}}$ ocorrer é de

$$\boldsymbol{P(A) = p_1 + p_2 + p_4 = 0,1 + 0,3 + 0,4 = 0,8}$$

Após a discussão do exemplo, serão abordados alguns teoremas envolvendo o conceito de Probabilidade num espaço amostral finito como segue na definição. Como muitos deles já foram vistos, ou são intuitivos, espera-se que os alunos compreendam o conteúdo sem muitas dificuldades.

Tomando um espaço amostral finito, ou seja, $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, os seguintes teoremas são válidos.

Teorema 1: A probabilidade de um evento certo é 1

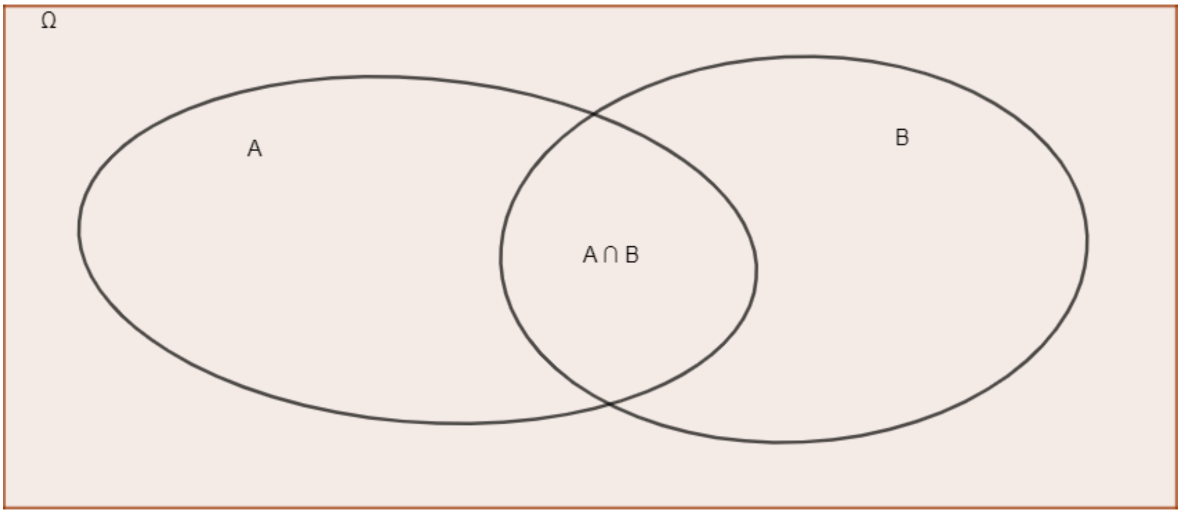
Teorema 2: Se A ⊂ B então P(A) ≤ P(B)

Teorema 3: Se A é um evento, então 0 ≤ P(A) ≤ 1.

Teorema 4: Se A e B são eventos, então P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

Para demonstrar tal teorema será utilizada a representação baixo para evidenciar que, ao somarmos a P(A) e P(B) somamos duas vezes a probabilidade P(A ∩ B), logo, é necessário "compensá-la".

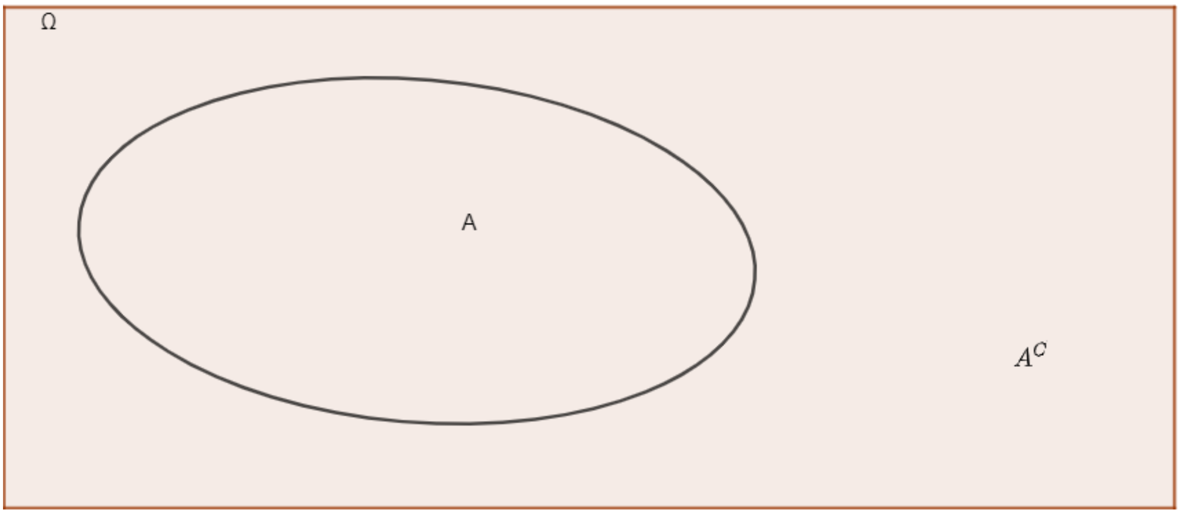
Figura 79: Intersecção de eventos.



Fonte: Acervo dos autores

Teorema 5: Se A é um evento então $P(A^C) = 1 - P(A)$

Figura 80: Evento complementar.



Fonte: Acervo dos autores

Por fim, será definido um dos casos particulares de Probabilidade e Espaço Amostral que consiste em um Espaço Amostral em que a probabilidade de os eventos elementares ocorrerem é a mesma. Para facilitar a compreensão de tal conceito será utilizado o exemplo de se retirar uma carta específica, de maneira aleatória, de um baralho com 52 cartas. Assim, será definido tal conceito com base na definição que segue.

Espaços Amostrais Equiprováveis: Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Diz-se que a distribuição de probabilidade em Ω é equiprovável se $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_k$, ou seja, se todos os eventos elementares de Ω tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Por fim, serão propostas as questões que seguem para que os alunos reflitam sobre os conteúdos trabalhados e tentem aplicá-los por conta própria.

1 - (ENEM - 2018) O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para a colocação em uma urna.

Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% delas eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%.

Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a

a) 10.
b) 15.
c) 35.
d) 40.
e) 45.

Resposta:

25% de 20 questões colocadas corresponde a 5, logo, a proporção que temos é $\frac{5}{20}$.

Ao adicionar mais cartas queremos obter a proporção $\frac{75}{100}$*, assim, temos que*

$$\frac{5+x}{20+x} = \frac{75}{100} \Rightarrow 500 + 100x = 1500 + 75x \Rightarrow 25x = 1000 \Rightarrow x = 40$$

Logo, é necessário adicionar 40 cartas.

2 - (ENEM - 2016) Um casal, ambos com 30 anos de idade, pretende fazer um plano de previdência privada. A seguradora pesquisada, para definir o valor do recolhimento mensal, estima a probabilidade de que pelo menos um deles esteja vivo daqui a 50 anos, tomando por base dados da população, que indicam que 20% dos homens e 30% das mulheres de hoje alcançaram a idade de 80 anos.

Qual é essa probabilidade?

a) 50%
b) 44%
c) 38%
d) 25%
e) 6%

Resposta:

Queremos saber a probabilidade de um ou outro estar vivo aos 80 anos, assim, temos a expressão P(H U M) = P(H) + P(M) - P(H ∩ M), porém precisamos saber a probabilidade de ambos estarem vivos ao mesmo tempo aos 80 anos, para isso, basta realizarmos

$$\boldsymbol{P(H \cap M) = P(H).P(M) = \frac{20}{100}\frac{30}{100} = \frac{6}{100}}$$

Assim, temos

$$\boldsymbol{P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = \frac{20}{100} + \frac{30}{100} - \frac{6}{100} = \frac{44}{100} = 44}\%$$

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos. Além disso, durante a resolução dos exercícios os alunos serão acompanhados e avaliados com base na compreensão do conteúdo e nas interações realizadas.

Referências:

DANTE. Roberto. **Tudo é Matemática**. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar -** Trigonometria - v.1, 8. ed. São Paulo: Atual. 2004.

4.9.1 Relatório de aula 9

No dia dois de julho de 2022, às 08 horas, iniciou-se os trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado II, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste-Campus Cascavel, com a atuação dos discentes no Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT). Estavam presentes na aula os acadêmicos Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin que ministraram a aula, a professora orientadora Andréia Büttner Ciani e 13 alunos.

Às 8h15 a aula foi iniciada com uma revisão dos conceitos de Arranjo e Permutação vistos na aula anterior. Para isso, foi utilizada uma situação que relacionava o posicionamento de seis pessoas em três assentos e, para evidenciar a importância do posicionamento em um Arranjo, foi realizado um experimento imaginário, utilizando um método sistemático para verificar se, de fato, a ordem importava. Tal método utilizava-se nomes de pessoas as quais precisavam ser acomodadas em três assentos, uma ao lado da outra. Ao imaginarem a situação foi possível perceber que se tivessem o mesmo grupo de 3 pessoas, mas se a ordem fosse alterada, seriam obtidos 6 resultados diferentes, ou seja, a ordem importava!

Dessa forma, pode-se concluir, juntamente com os alunos, que a ordem importava para a resolução desse tipo de situação problema e, era necessário tratar a questão como Arranjo para ser resolvida. Após isso, foi deduzida a expressão geral de um Arranjo, utilizando como base os dados do exemplo e o teorema fundamental da contagem.

$$A = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1} = \frac{6!}{3!}$$

Foi indagado pelos alunos se utilizar o método de "traços" era válido para todos os casos, foi respondido que sim, mas era necessário se atentar às outras informações dadas pelo problema que podem limitar as possibilidades. Os traços em que os alunos falaram está relacionado a analisar em cada caso o número de possibilidades, por exemplo: Como cinco pessoas podem se sentar em 3 lugares. Temos 3 lugares e portanto temos que analisar as possibilidades em cada um dos assentos. Assim, marcamos 3 "traços" e analisamos um por um: _ __ __. No primeiro traço são 5 possibilidades de pessoas que pode se sentar, no segundo são 4 e no terceiro 3. Assim, ficamos com 5 4 3. E enfim, basta realizar a multiplicação $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Enquanto isso, um aluno mencionou que havia uma questão de um vestibular da Unioeste de 2021 que utilizava tal conceito e, nesse momento, os acadêmicos pesquisaram a prova para encontrar a questão. Após encontrar a questão, ela foi lida em voz alta e explicado que, para resolvê-la era necessário utilizar Arranjo com reposição e o conceito de Probabilidade, que seria visto mais aprofundado posteriormente na aula. Assim, foi explicado que nem todas as combinações satisfaziam as condições dadas, e dessa forma, seria analisada a probabilidade.

A partir de Permutação sem repetição foi introduzido o conteúdo de Combinação e, para isso, foi apresentado um exemplo de formação de grupos em trios, sem hierarquia definida entre os participantes, ou seja, em que a ordem que as pessoas compõem no trio não importa! Para exemplificar tal conceito foi utilizado um exemplo com os nomes dos estagiários Gabriel, Marcele, Rafael e Thays e dos alunos Vitor e Sérgio. Inicialmente, foram realizadas algumas combinações de trios entre os nomes utilizando a inicial de cada nome, nesse processo um dos alunos identificou a possibilidade de um arranjo entre os elementos. Após tal construção foi indagado aos alunos se haveria mais ou menos combinações do que arranjos, os alunos responderam que menos. Além disso, um dos alunos identificou a necessidade de se dividir a quantidade de arranjos pela quantidade de posições. Por fim foi escrita a expressão geral de combinação em relação a **m**, representando o número total de elementos do evento, e **r**, representando o número de elementos que devem compor cada agrupamento. A fim de melhorar o entendimento de tal processo, foi feita a combinação de 6 elementos tomados em 5 lugares e o exemplo de uma combinação de 8 elementos tomados em 2 posições.

Seguindo com o conteúdo foi comentado sobre o conceito de permutação com repetição e, para isso, foi tomada a palavra Ana, e arara. A partir do cálculo dos possíveis anagramas formados com essas palavras, foi evidenciado que ao se trocar de posição as letras que se repetem, não se altera o anagrama obtido. Foi indagado aos alunos o que deveria ser feito, um deles respondeu que era necessário dividir a quantidade de permutação simples. Foi definida a ideia geral para encontrar a quantidade de permutação com repetição, evidenciando como se fazia quando havia uma letra que se repetia e depois quando duas ou mais se repetiam.

Por fim, ocorreu a formalização da permutação com repetição. Para ilustrar tal conceito foi feito um anagrama com a palavra ornitorrinco, assim, foi evidenciado que, inicialmente, seriam possíveis 12! permutações simples. Porém, como se repetia 3 vezes a letra r, 2 vezes a letra n, 3 vezes a letra o e 2 vezes a letra i, nesse momento os alunos participaram da construção e da resolução do exemplo fazendo as devidas contas. Após isso, foi resolvido o exemplo e destinado um tempo para que os alunos tentassem resolver o exercício 1, que foi escrito no quadro.

Os alunos foram bem participativos, respondendo aos questionamentos realizados pelos estagiários. Em um dos questionamentos foi utilizado um exemplo que consistia na utilização de cores 5, azul, amarelo, vermelho, verde e roxo, para pintar uma bandeira com 3 listras, de forma que pretendia-se saber as possíveis combinações de cores possíveis. Inicialmente, os alunos acharam que a ordem importava, mas, depois perceberam que a alteração de cores não alteraria o resultado. Assim, chegaram à conclusão de que se tratava de uma combinação. Foram realizadas as combinações. As alternativas da questão foram escritas no quadro para que os alunos analisassem tais alternativas e chegassem a uma conclusão da resposta final. Houve confusão sobre se deveria ser feita a soma ou a multiplicação dos resultados anteriores, foi explicado que, pelo princípio multiplicativo, é necessário multiplicar ambos os resultados.

Seguindo com o conteúdo, foi realizada a leitura da questão 2, anotando no quadro os pontos mais importantes. Um dos alunos chegou à conclusão de que era necessário realizar um Arranjo para as posições possíveis e a expressão da resolução foi escrita no quadro. A questão 3 foi exposta para ser resolvida após o intervalo.

Após o intervalo, foi realizada a resolução do exercício 3, para isso, foi indagado se a ordem era importante para a resolução, foi respondido que sim e a partir disso, foram construídas duas combinações com os dados apresentados. Após isso, foi questionado qual das alternativas do exercício estava correta, sendo evidenciado a necessidade de subtrair ambas as combinações. Os alunos conseguiram acompanhar as resoluções sem muitas dificuldades e participaram da construção e resolução dos exercícios.

Seguindo com o conteúdo, foram relembrados os conceitos de espaço amostral, evento e experimento aleatório visto anteriormente. Para isso foi utilizado exemplos de moedas e dados, em que ao lançá-los existiam algumas possibilidades possíveis, porém, não é possível saber de antemão o resultado a ser obtido. Após isso, foi introduzido o conceito de frequência relativa, para ilustrar tal ideia foi utilizado o exemplo de lançamento de 100 dados. Após isso, foi escrito formalmente a definição de frequência relativa no quadro.de acordo com o plano de aula. Nesse momento foi feita uma pausa para tirar uma foto com todos os alunos.

Após isso, para facilitar a compreensão dos alunos foram escritos alguns exemplos no quadro utilizando o lançamento de um dado 100 vezes, como descrito no plano, na resolução de tal exemplo foi evidenciado a "construção" do conceito de frequência relativa.

Houve dúvidas sobre a utilização de tal conceito devido a ideia de probabilidade, que seria abordada posteriormente, assim foi escrito no quadro uma tabela com as aparições hipotéticas de todos os números e, na sequência, foi feita a frequência relativa para todos os resultados. A partir disso os alunos compreenderam a utilização de tal conceito e que não era exatamente a mesma coisa que o conceito de probabilidade, já que a primeira está relacionada a um experimento realizado. Em seguida, o conceito de probabilidade foi exposto aos alunos. Foi comentado que algumas questões de probabilidade podem ser contraintuitivas como é o caso do paradoxo de Monty Hall e o paradoxo do aniversário.

Os estagiários se despediram dos alunos, pois essa seria a última aula presencial e avisaram que enviariam a última aula assíncrona na próxima semana.

Considerando que no dia seguinte haveria vestibular e um aluno solicitou ajuda para tirar algumas dúvidas, os estagiários ficaram um pouco além do horário da aula para auxiliá-lo.

4.10 Plano de aula 10 – Assíncrono.

Conteúdo: Tratamento da Informação.

Objetivo geral: Promover a interpretação de gráficos, tabelas e esquemas e a identificação de suas características.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com tratamento de informações, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender as diferentes características entres os gráficos de colunas, setores, linha e área;
- Interpretar os dados quando representados por tabelas e esquemas;
- Resolver as questões propostos com os conceitos vistos;
- Analisar os dados presentes em gráficos de colunas, setores, linhas e áreas.

Tempo de execução:

Uma videoaula de 30 minutos.

Recursos didáticos:

Software Microsoft PowerPoint.

Encaminhamento metodológico:

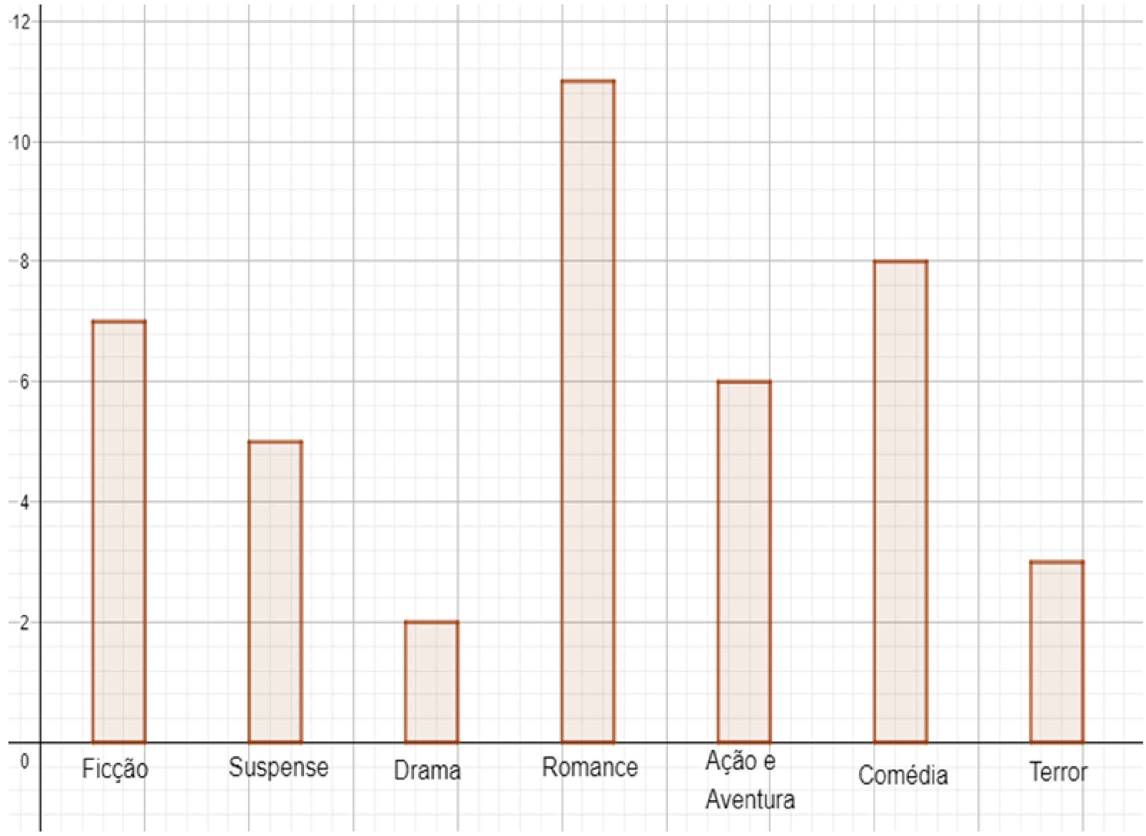
Inicialmente a aula começará com uma introdução sobre os conceitos a serem vistos na aula, sendo eles a análise de dados presentes em alguns tipos de gráficos, tais como gráficos de coluna, setores, linhas e áreas, tabelas e esquemas. Após isso, será comentado sobre os tipos de gráficos citados, começando com o gráfico de colunas, ou barras, que será definido como segue.

Um gráfico de colunas, ou de barras, é um tipo de gráfico que é utilizado para facilitar a análise de dados numéricos com base em espaços de tempo, lugares ou algum outro tipo de intervalo que não seja numérico.

Para ilustrar tal conceito, será dado o seguinte exemplo e, em seguida, construído o gráfico de barras com tais dados.

Suponha que numa sala de aula com 42 alunos os alunos foram indagados sobre seu gênero de filme favorito e, para facilitar a visualização dos dados, foi criado o gráfico abaixo

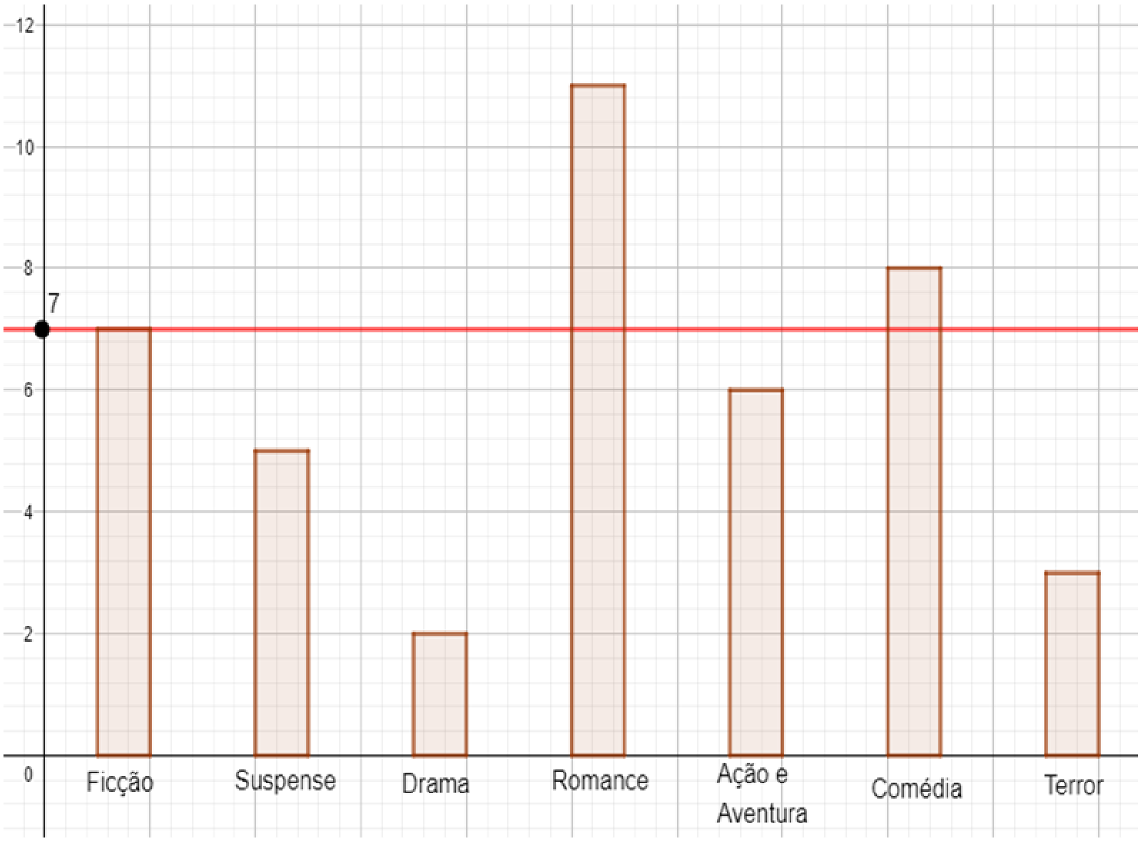
Figura 81: Gráfico de barras.



Fonte: Acervo dos autores

Após tal construção será explicado como “ler” os dados contidos no gráfico, de forma que, para analisar tal gráfico, basta olhar a categoria que se deseja saber a informação e comparar o tamanho da barra em relação ao eixo y. Assim, será indagado quantos alunos têm ficção como gênero de filme favorito e será apresentada a resposta utilizando uma linha vermelha que intercepta o topo da barra e o eixo y no ponto 7, representado por meio da Figura x.

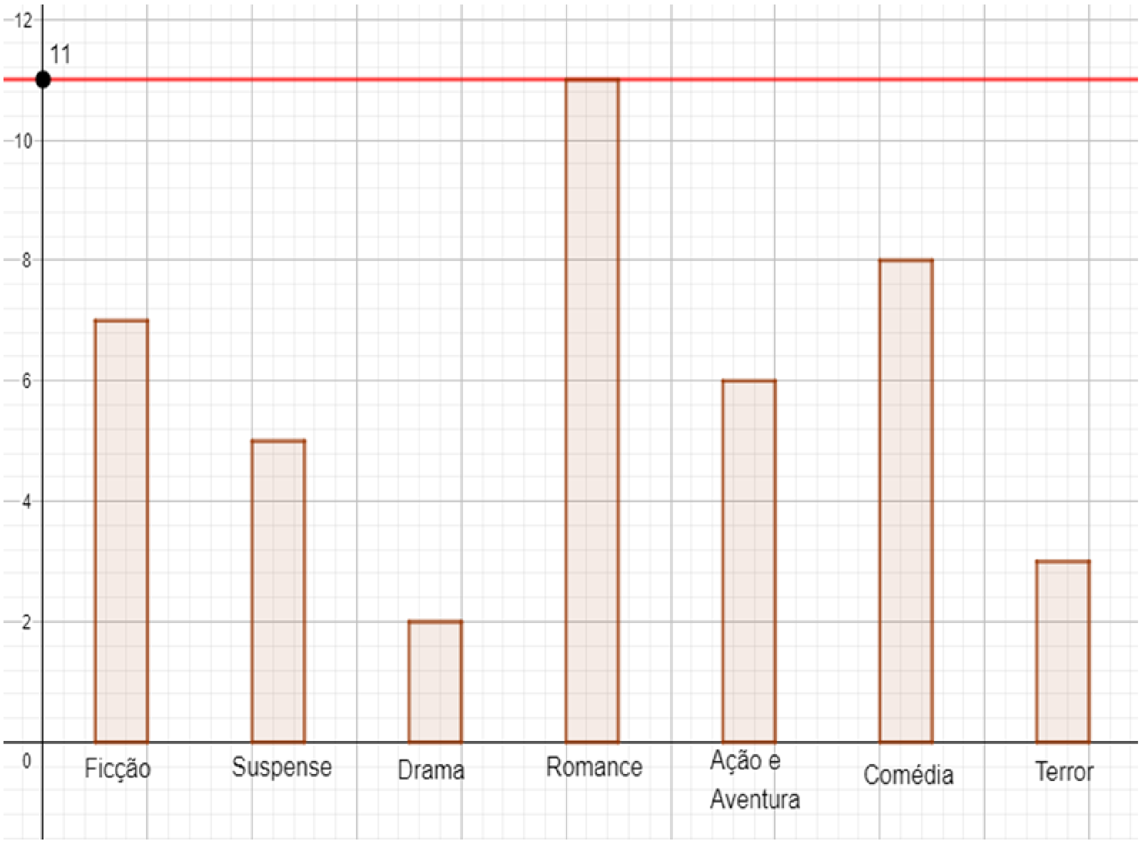
Figura 82: Gráfico de barras com linha vermelha no 7.



Fonte: Acervo dos autores

Espera-se que os alunos compreendam o valor que tal barra representa sem muitos problemas, porém, para dar outros exemplos, será comparado a quantidade que tem romance como gênero de filme favorito e, de forma similar à primeira, a resposta será representada com base na Figura x.

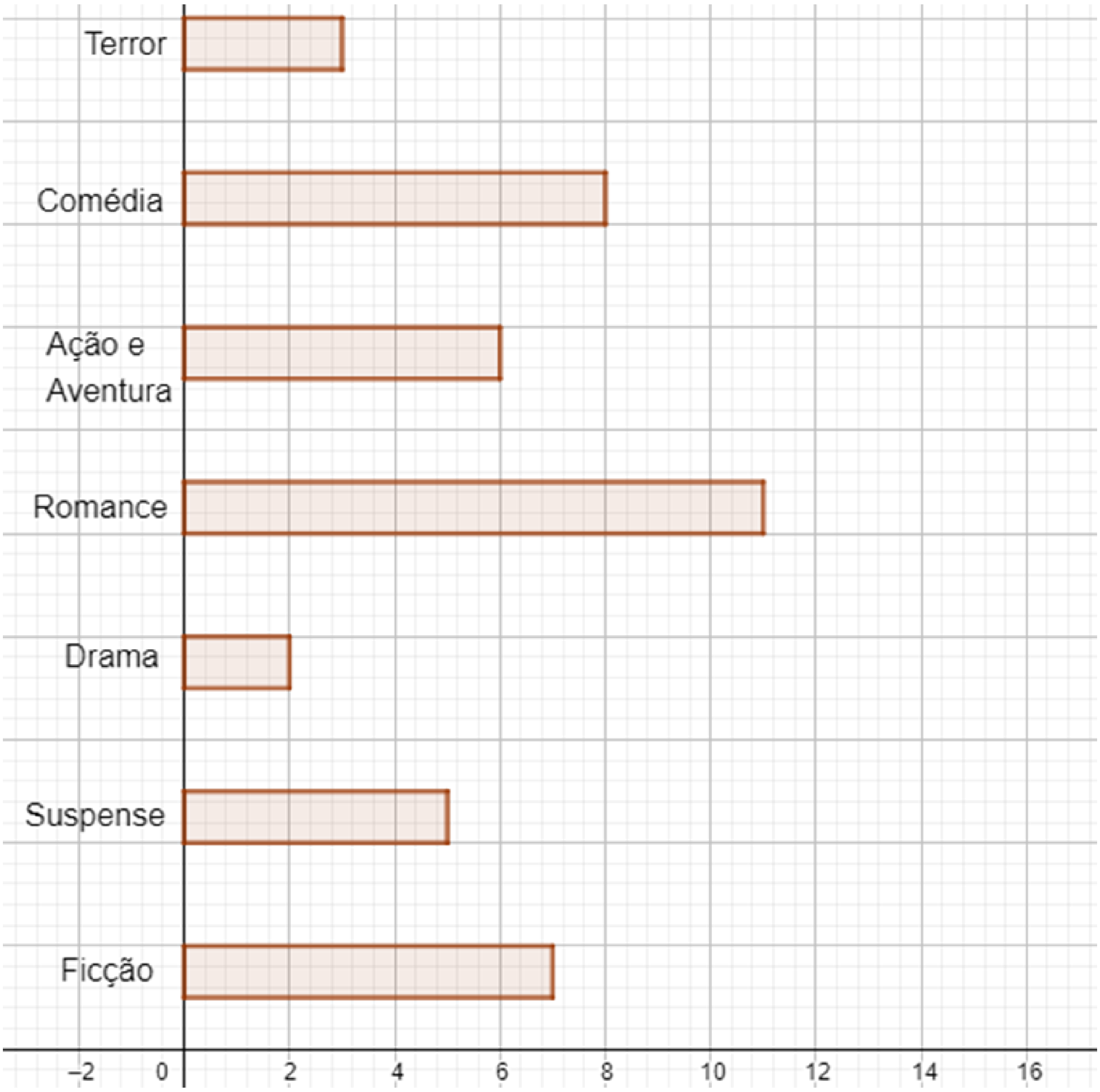
Figura 83: Gráfico de barras com linha vermelha no 11.



Fonte: Acervo dos autores

Assim, será evidenciado que para saber a quantidade total de alunos é possível somar as quantidades de cada gênero, além disso, será comentado que esse tipo de gráfico não tem relação com a área das colunas, pois a utilização de barra é apenas um dos diversos meios de representar dados de maneira clara e objetiva. Além disso, será evidenciado que é possível utilizar uma representação similar às anteriores, porém com as barras na horizontal, assim como representado pela Figura x que segue.

Figura 84: Gráfico de barras na horizontal.



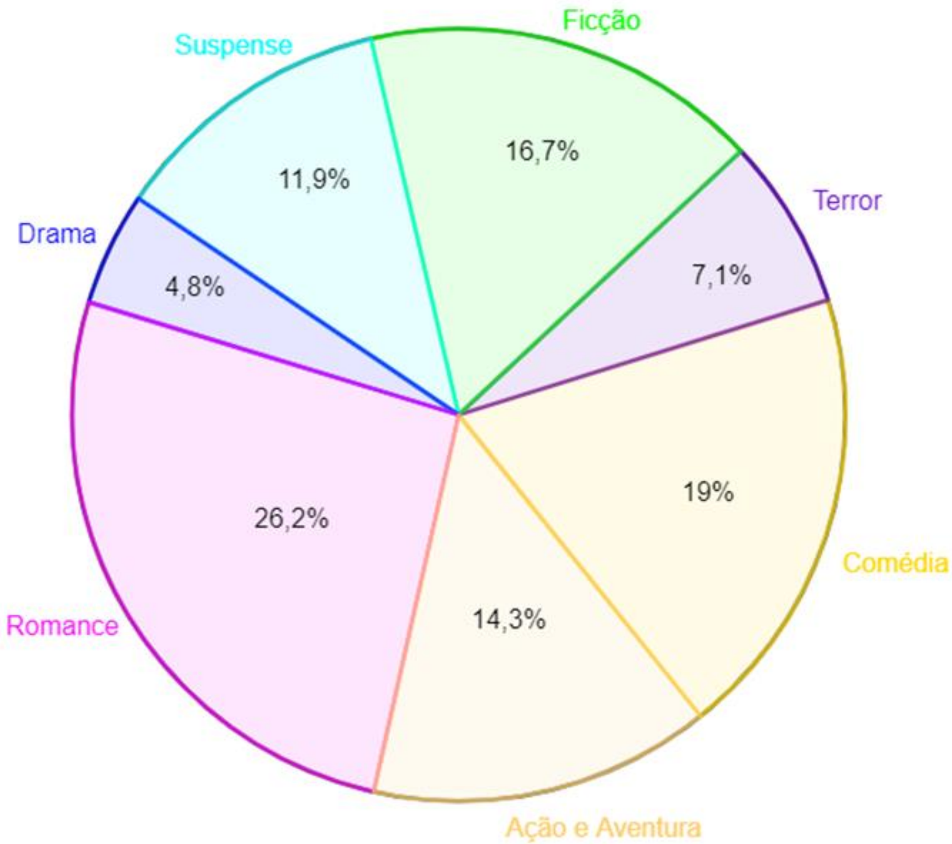
Fonte: Acervo dos autores

Seguindo com o conteúdo, será comentado sobre o gráfico de setores, ou pizza, que será definido com base no conceito que segue.

O gráfico de setores, ou pizza, é um tipo de gráfico utilizado, principalmente, com o intuito de representar as porcentagens dos dados representados, para isso, utiliza-se como referência uma circunferência, em que o todo representa 100%, e as divisões dessa circunferência correspondem a uma dada porcentagem.

Em seguida, serão utilizados os dados anteriores para construir um gráfico de setores, representado pela Figura x, e evidenciado que, os mesmos dados podem ser utilizados em diferentes representações.

Figura 85: Gráfico de setores.



Fonte: Acervo dos autores

Continuando com o conteúdo, serão trabalhados os gráficos de linha e de área, inicialmente, será definido o gráfico de linha com base na definição que segue.

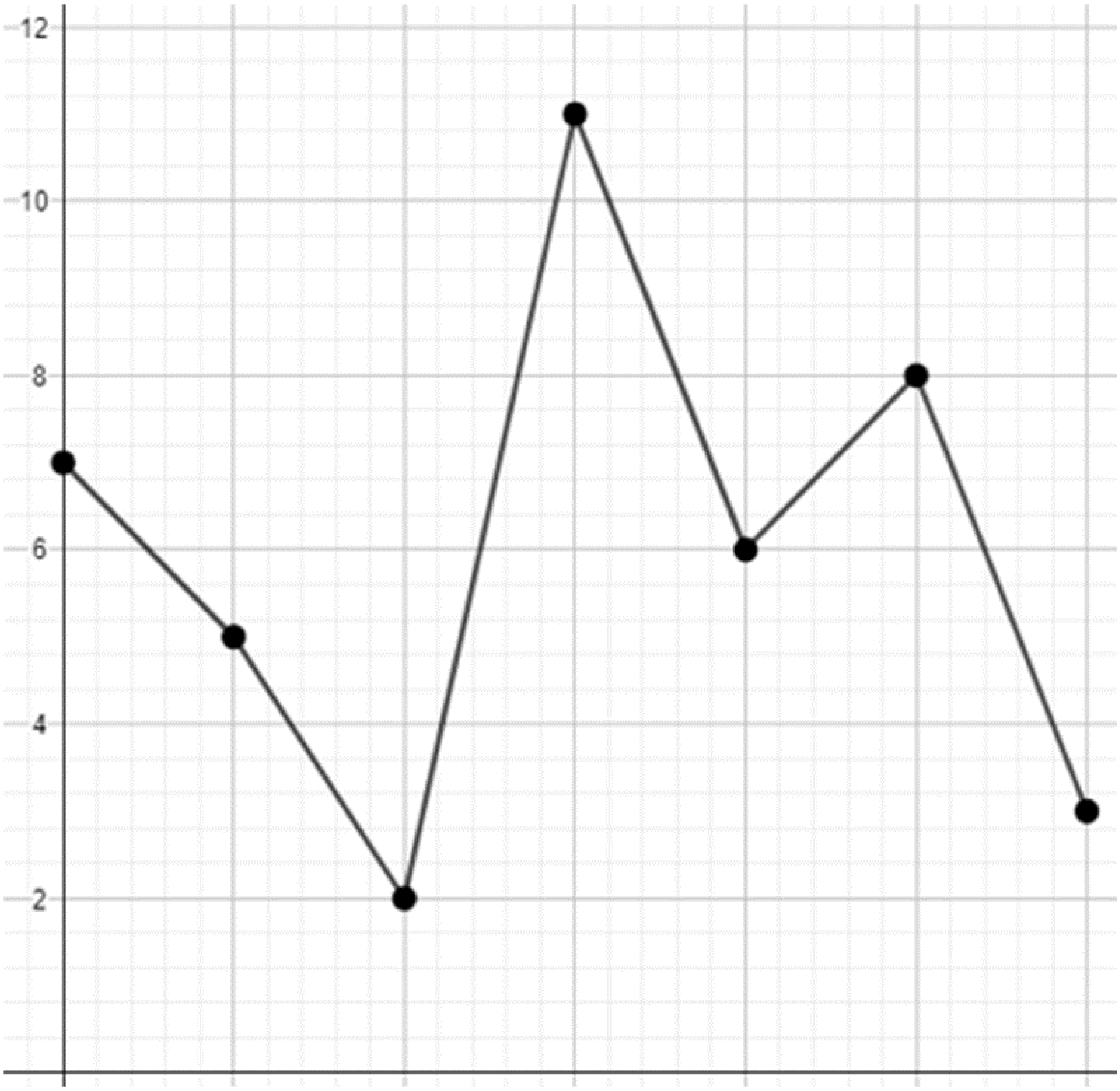
Gráficos de linhas são tipos de gráficos que buscam representar tendências de movimento em dados intervalos de tempo.

Após isso, será construído um gráfico de linhas genérico e será explicado, por meio do seguinte exemplo, algumas características de tal gráfico.

O gráfico abaixo pode ser visto como a representação da quantidade de vendas, em milhões, entre os meses de janeiro, representado no primeiro ponto, até agosto do mesmo

ano, com todos os pontos representando o valor do mês e os segmentos entre os pontos sendo apenas um meio para evidenciar a ascensão ou declínio das vendas.

Figura 86: Gráfico de linha.



Fonte: Acervo dos autores

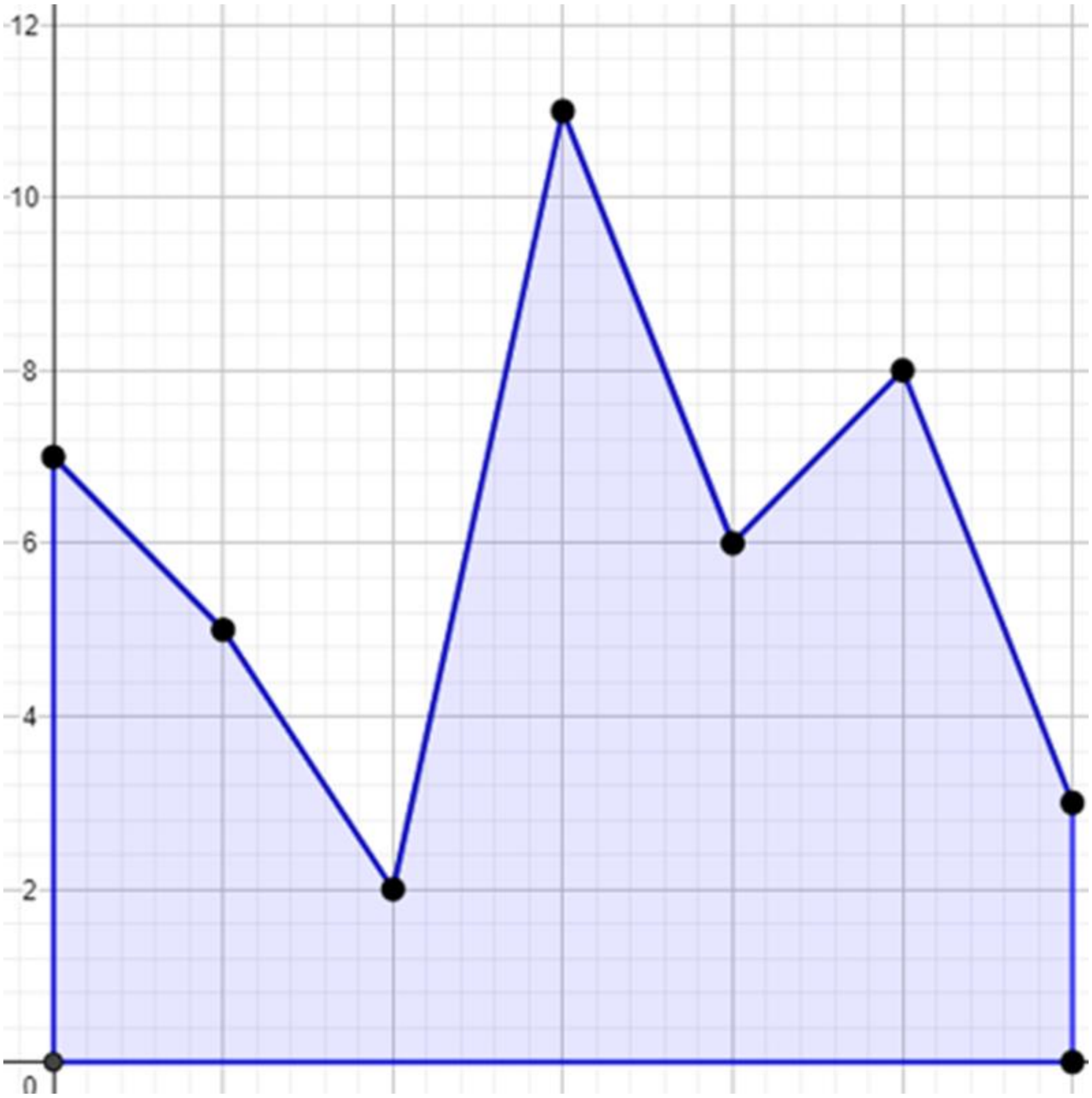
Espera-se que os alunos consigam distinguir a diferença entre os pontos que representam os valores e os segmentos de reta que servem apenas para mostrar a variação entre tais valores. Será evidenciado que é possível utilizar intervalo de anos, dias etc., desde que o espaçamento entre cada referencial utilizado seja igual.

Continuando com o conteúdo será introduzido o conceito de gráficos de área com base na definição que segue.

O gráfico de área é utilizado para representar totais acumulados, ou seja, o objetivo do gráfico de área é encontrar a variância entre os dados em um certo intervalo, porém, com a representação de um sombreado entre os valores e o eixo x.

Após isso será utilizada a Figura abaixo para mostrar um dos possíveis casos de um gráfico de área.

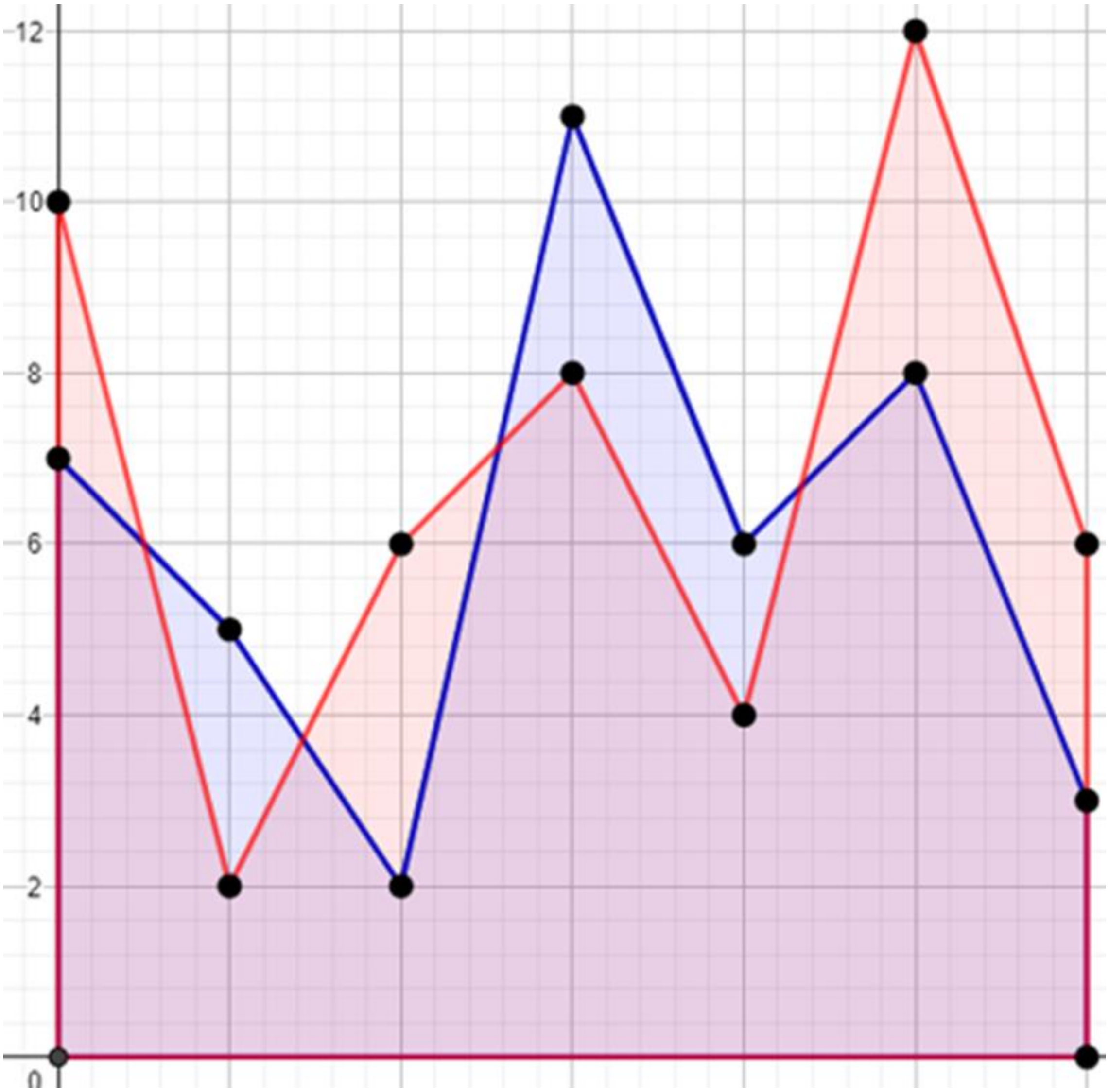
Figura 87: Gráfico de área azul.



Fonte: Acervo dos autores

Após isso, será comentado que outra utilização de tais gráficos é na representação de, por exemplo, vendas em anos distintos, mas num mesmo intervalo de meses. Assim, será utilizado o exemplo anterior para ilustrar, por meio da Figura x, as vendas no período de janeiro a agosto nos anos de 2020 e 2021.

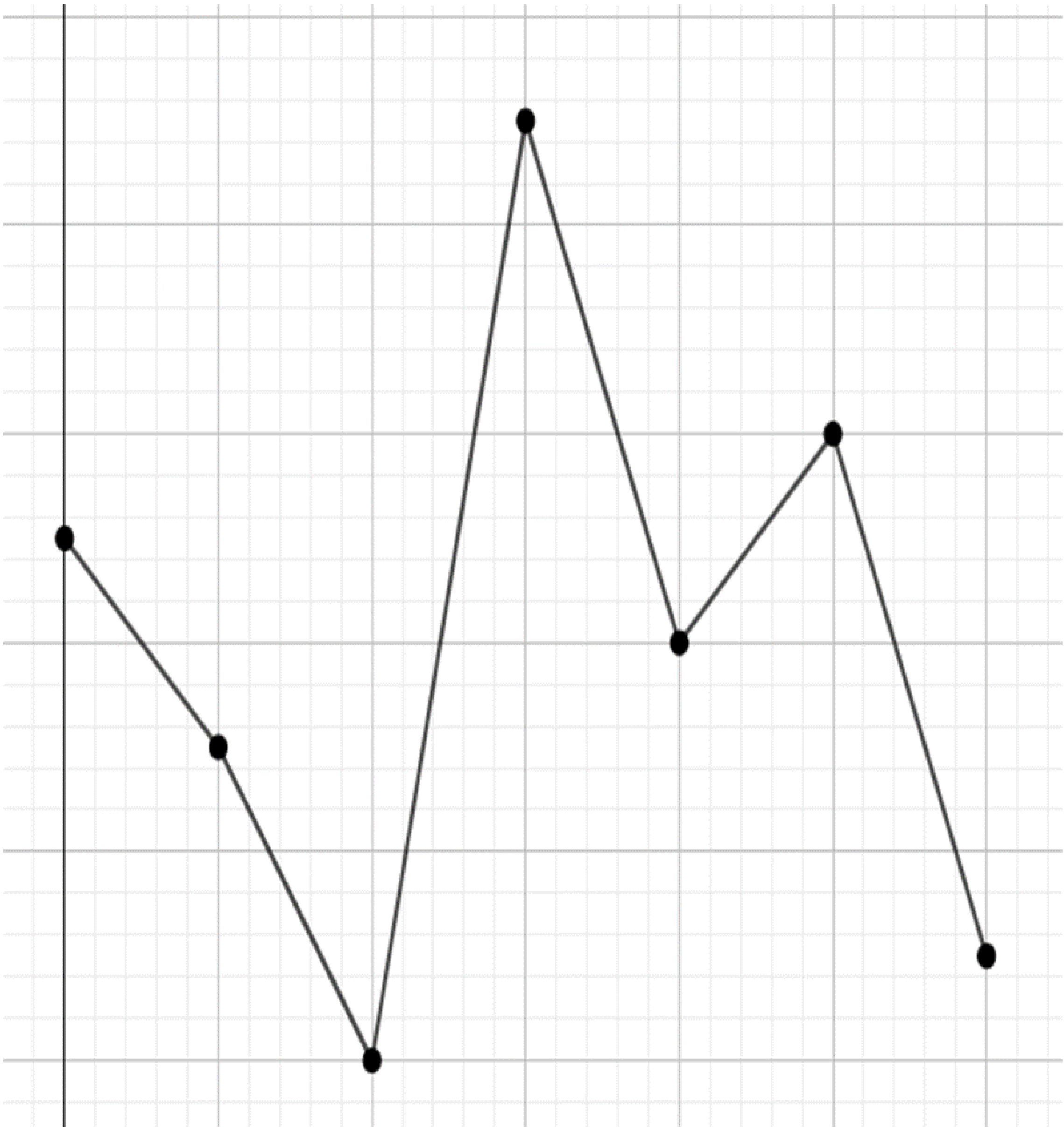
Figura 88: Gráfico de área azul e vermelha



Fonte: Acervo dos autores

Seguindo com o conteúdo, será comentado sobre as escalas em gráficos, de forma a evidenciar que, sem ela, não é possível ter uma análise precisa dos dados observados. Para ilustrar tal conceito serão usadas as Figuras abaixo, em que uma não há escala enquanto a outra sim.

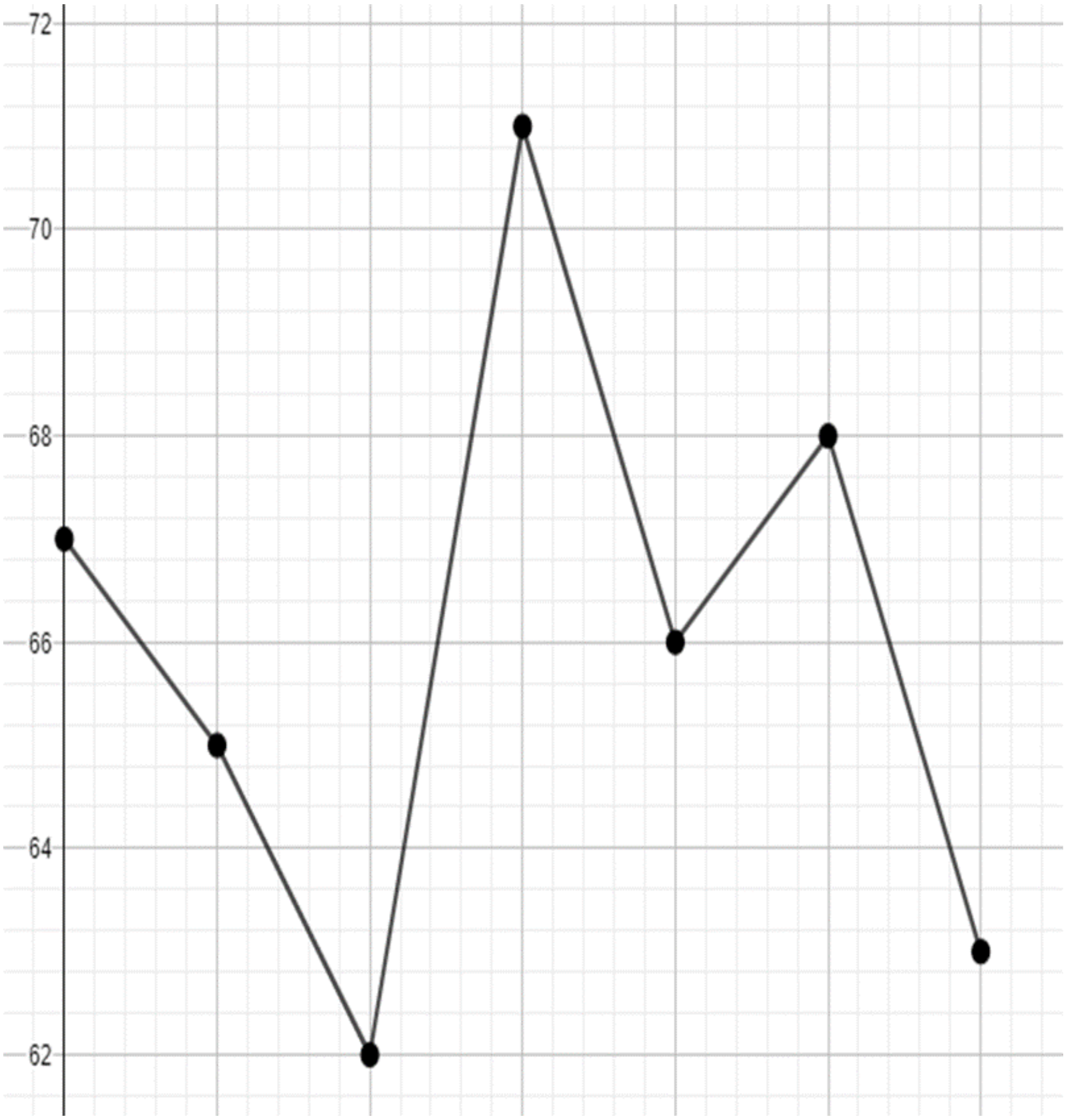
Figura 89: Gráfico sem escala.



Fonte: Acervo dos autores

Com base neste gráfico, espera-se que os alunos considerem que haja uma grande variação entre os dados analisados.

Figura 90: Gráfico com escala.



Fonte: Acervo dos autores

Espera-se que com ambas as imagens os alunos compreendam que é possível ocorrerem análises errôneas sem uma precisão adequada dos dados observados.

Continuando com o conteúdo, será comentado sobre a análise de dados organizados em tabelas e, para isso, será utilizada a tabela abaixo.

Tabela 12: Gênero de filmes.

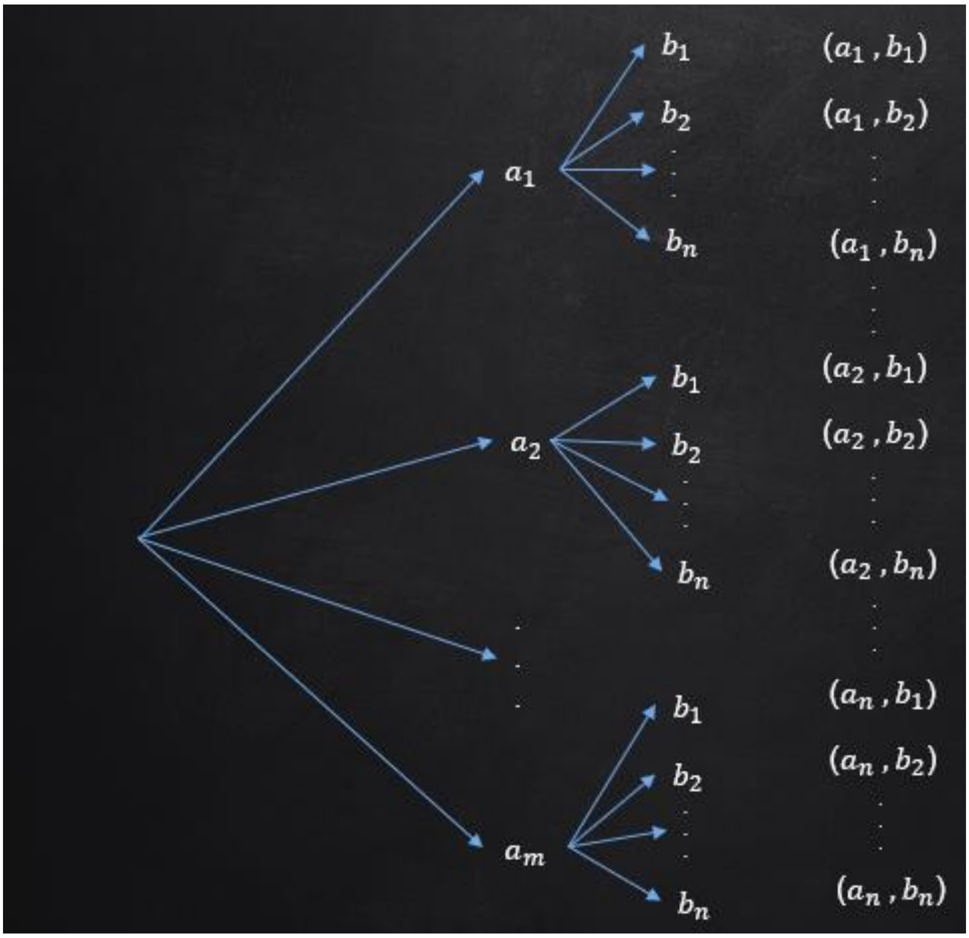
Gênero de Filme	Quantidade de Respostas
Ficção	7
Suspense	5
Drama	2
Romance	11
Ação e Aventura	6
Comédia	8
Terror	3
Total	42

Fonte: Acervo dos autores

Com base na tabela, será comentado que a utilização de tabelas é útil para representar dados, por permitir uma organização simples e organizada dos dados. Normalmente utiliza-se tal método quando a quantidade de informação não é muito grande e, em sua grande maioria, os dados são organizados como na Figura x. Além disso, a “leitura” de tais dados é feita de forma horizontal, ou seja, os dados que estão na mesma linha estão, de alguma forma, relacionados entre si.

Em seguida, será comentado sobre alguns esquemas utilizados na matemática de forma que, de maneira geral, são compostos em forma de correlacionar tópicos de informações, ou dados específicos, entre si de forma lógica e geométrica, muitas vezes sendo utilizado setas para expressar tal relação. Assim, serão utilizadas as Figuras x e x para representar alguns esquemas já vistos durante o PROMAT.

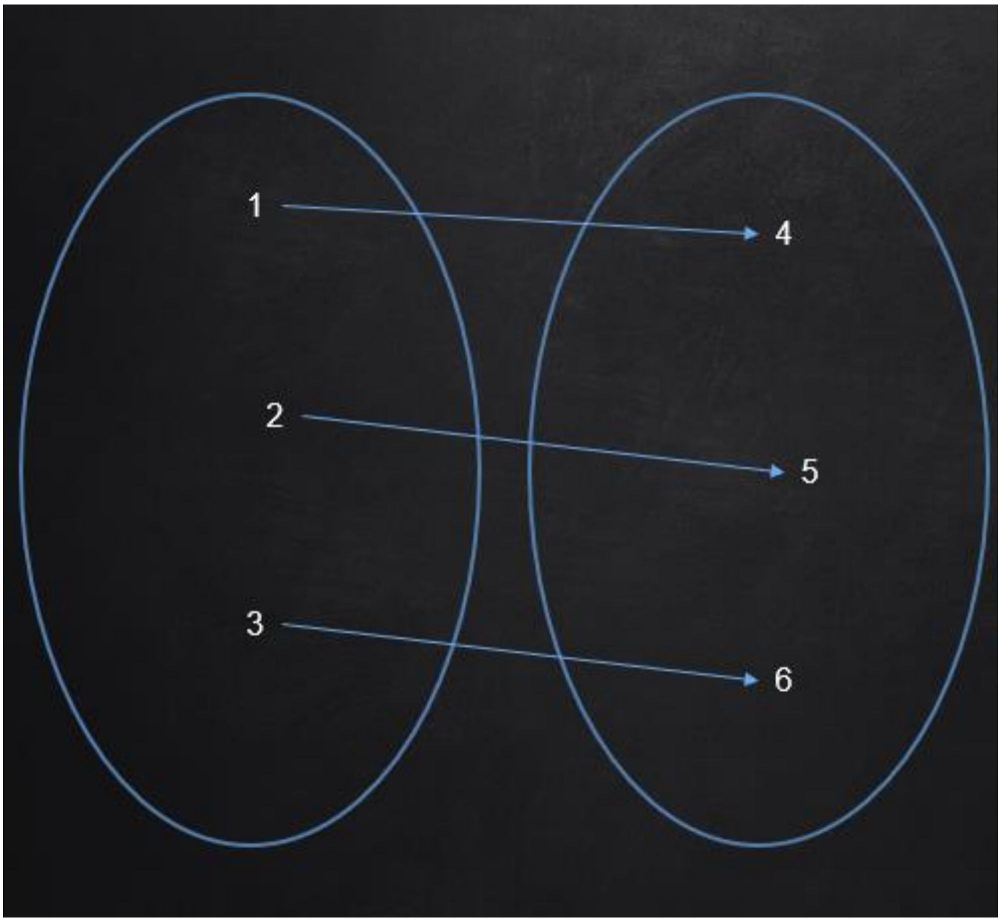
Figura 91: Esquema de combinação.



Fonte: Acervo dos autores

Nesse exemplo, visto na última aula assíncrona, são relacionadas as possíveis ordenações entre os elementos de um conjunto A com um conjunto B. Espera-se que os alunos compreendam tal esquema sem muitas dificuldades.

Figura 92: Esquema de relação entre conjuntos.

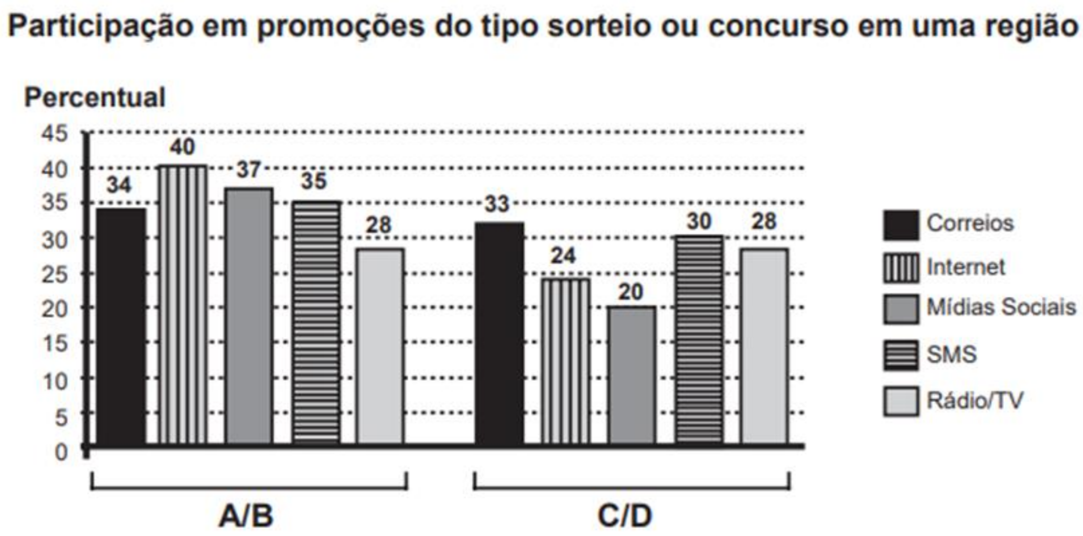


Fonte: Acervo dos autores

Espera-se que os alunos compreendam o esquema de relação entre conjuntos por se tratar de um conteúdo visto tanto no PROMAT quanto no conteúdo de funções e relações visto nas escolas.

Por fim, serão propostas as seguintes questões, que serão resolvidas em sequência, para que os alunos tentem aplicar os conceitos vistos.

1 - (ENEM - 2015) Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no *site* da empresa/ marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/ TV.



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria das classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D).

De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número possível de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

a) Correios e SMS
b) Internet e Correios
c) Internet e Internet
d) Internet e Mídias Sociais
e) rádio/ TV e rádio/ TV

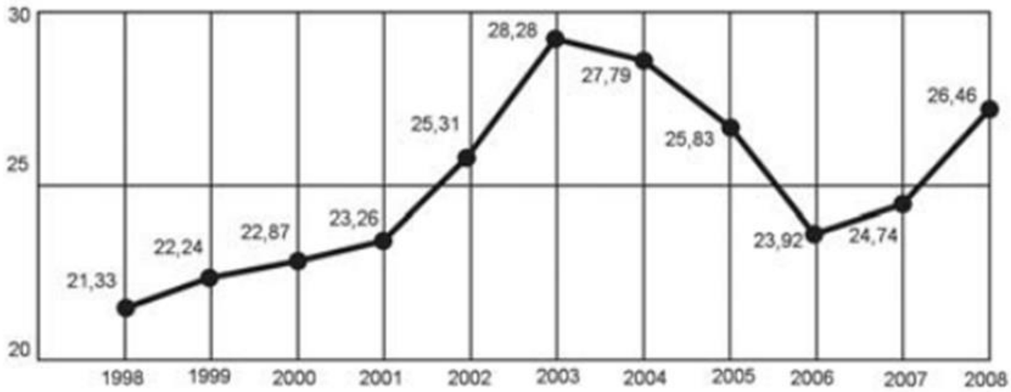
Resolução:

Analisando os dados em cada grupo, podemos observar que a maior barra do gráfico e, consequentemente o maior percentual de participação no grupo A/B é na internet, que representa 40%, e no grupo C/D isso ocorre nos correios, que representa 33%, assim, a alternativa correta é a B.

2 - (ENEM - 2011) O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de

equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). **Almanaque abril 2010**. São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado).

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

a) 1998 e 2001

b) 2001 e 2003

c) 2003 e 2006

d) 2003 e 2007

e) 2003 e 2008

Resolução:

Analisando o gráfico, é possível perceber que os valores em cada ano aumentam até o ano 2003, em que começa a haver uma queda, se prolongando até o ano de 2006, pois em 2007 já há um aumento nas participações do agronegócio no PIB brasileiro, logo, a alternativa correta é a letra C.

Avaliação:

A avaliação será realizada com base nas respostas dos questionamentos feitos pelos professores durante a aula e nas resoluções obtidas pelos alunos nos exercícios propostos. Além disso, durante a resolução dos exercícios os alunos serão acompanhados e avaliados com base na compreensão do conteúdo e nas interações realizadas.

Referências:

DANTE. Roberto. **Tudo é Matemática**. 7º ano. São Paulo: Ática, 2011.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar - Trigonometria** - v.1, 8. ed. São Paulo: Atual. 2004.

4.10.1 Relatório de aula 10.

No dia dezesseis de julho de 2022, foi encaminhado aos alunos a décima aula do Programa de acesso e permanência de estudantes da rede pública de ensino em universidades públicas: um enfoque à área de matemática (PROMAT), trabalhos práticos da disciplina Metodologia e Prática de Ensino - Estágio supervisionado II, do Curso de licenciatura em matemática da Unioeste - Campus Cascavel. Essa aula ocorre de maneira assíncrona, publicada na plataforma de compartilhamento de vídeo *YouTube*. O conteúdo trabalho foi o Tratamento da Informação.

Os discentes Gabriel Borghetti, Rafael Tech, Marcele Cristine Assis e Thays Perin gravaram a aula separadamente utilizando a ferramenta do *Microsoft Power Point,* na qual é possível gravar o conteúdo presentes dos *slides* com áudio. Nessa semana não foi possível reunir todos os acadêmicos, mas não ocorreu problemas com o áudio. O vídeo tem ao todo 21 minutos, dos quais 16 minutos referem-se à explicação dos conceitos sobre interpretação de gráficos, tabelas e esquemas, o restante foi destinado a resolução de exercício.

Toda a aula ocorreu como planejado, pois caso ocorressem erros era possível realizar novamente a gravação. Durante a explicação foram realizadas perguntas retóricas com o objetivo de gerar uma imersão de quem estivesse assistindo. A aula está disponível pelo *link:* https://www.youtube.com/watch?v=KRXR-N37OWc.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para que um professor tenha uma boa atuação, é indispensável que saiba reforçar a capacidade crítica do educando, tal qual a sua curiosidade (FREIRE, 1996), saiba estimular o desenvolvimento das capacidades cognitivas, considere que os alunos possuam diferentes vivências e experiências em diferentes contextos sociais e culturais. Ainda, é fundamental que o professor saiba e compreenda a necessidade de adequar os métodos de ensino de acordo com as necessidades dos alunos. É indispensável que o professor possua a capacidade de organizar, planejar, elaborar, executar e propor ações que auxiliem o processo de ensino.

O fato de estar diante dos alunos, em frete a uma sala, conduzindo a aula é sempre uma experiência com novos aprendizados. No estágio supervisionado I – PROMAT, o grupo não teve a oportunidade de estagiar com contato presencial entre o professor e aluno, por conta da pandemia do COVID-19, na qual o contato foi apenas remoto. Sabemos que é mais fácil estabelecer uma boa relação, quando há contato, o que sem dúvidas é um fator importante para a qualidade de ensino, pois a participação em aula dos alunos é mais efetiva.

Contudo, é necessário que o professor esteja ciente e preparado para as inúmeras situações que pode vir a enfrentar no decorrer da sua carreira profissional. Na matemática, é necessário que o professor conduza o aluno de modo que ele participe em todo o processo de “fazer matemática” (GRAVINA; SANTAROSA, 1999). Quando o aluno conseguir realmente aprender a matéria, ele será capaz de experimentar, interpretar, visualizar, induzir, generalizar e demonstrar.

No estágio supervisionado II - PROMAT foi possível realizar a associação que aprendemos nas diversas disciplinas de educação e a prática. Principalmente, ao lidar com as adversidades, fato que já, na primeira aula ocorreu, quando percebemos que os objetivos e metodologias precisariam ser alterados, focando justamente no processo de “fazer matemática”.

A execução do estágio em grupo é uma oportunidade de discussão de ideias e aprendizado por diferentes perspectivas, o que resulta em uma maior possibilidade de vivências e colabora com a construção da prática em sala de aula. A prática é sempre uma oportunidade de repensar a prática, revisitar erros e acertos, refletir sobre aprendizados e execução de novas ideais.

É inquestionável que ministrar as aulas no PROMAT II foi de grande importância para o nosso aprendizado, pois tivemos nosso primeiro contato de modo presencial, no controle de uma turma nova. Aprendemos a lidar com ocasiões inesperadas e com situações estressantes, pois um bom professor deve estar preparado e saber como agir em qualquer situação desafiadora. Contribuiu positivamente com a escolha feita por nós de sermos educadores, reafirmando nossa vontade além de ensinar matemática, formar cidadãos críticos e ativos na sociedade em que vivem.

Por fim, destaca-se que a realização do estágio foi gratificante, mostrando que a experiência vivenciada agregou valores e conhecimentos e contribuiu para o aperfeiçoamento profissional, além de crescimento na formação acadêmica.

6 REFERÊNCIAS

BULGRAEN, V. **O papel do professor e sua mediação nos processos de elaboração do conhecimento**. Revista Conteúdo, Capivari, v.1, n.4, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações**: Volume 1. São Paulo: Ática, 2011

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações**: Volume 2. São Paulo: Ática, 2011

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações**: Volume 3. São Paulo: Ática, 2011

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Informática na Educação**: teoria e prática. Porto Alegre, v. 2, n. 1, p. 73-88, 1999.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 1994.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar - Trigonometria** - v.1, 8. ed. Editora: Atual. 2004.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar – Combinatória Probabilidade** - v.1, 8. ed. Editora: Atual. 2004.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar – Geometria Analítica** - v.1, 8. ed. Editora: Atual. 2004.

OLIVEIRA, M.K. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento – um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1997.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**: Ensino Médio. v.1. São Paulo: Saraiva, 2014.

ENEM 2009 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2009/dia2_caderno5_amarelo.pdf - Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2011 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/dia2_caderno5_amarelo.pdf - Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2012 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/dia2_caderno5_amarelo.pdf - Acesso em: 8 abr. 2022.

ENEM 2015 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D1_CD2.pdf - Acesso em: 28 jun. 2022.

ENEM 2016 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV - Acesso em: 28 jun. 2022.

ENEM 2017 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D1_CD1.pdf - Acesso em: 14 abr. 2022.

ENEM 2018 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2018_PV_impresso_D1_CD1.pdf - Acesso em: 14 abr. 2022.

ENEM 2021 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_impresso_D1_CD2.pdf - Acesso em: 14 abr. 2022.

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [S. l.], 2010. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2010/ingles.PDF - Acesso em: 21 abr. 2022.

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [S. l.], 2011. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2011/Grupo_1.pdf - Acesso em: 8 abr. 2022.

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [S. l.], 2012. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2012/PROVA_DE_INGLES.pdf. - Acesso em: 21 abr. 2022.

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [S. l.], 2013. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/publicacoes/2013/018.pdf. - Acesso em: 14 abr. 2022.

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [S. l.], 2014. Disponível em:https://www.unioeste.br/cogeps/arquivos/vestibular/2014geral/030.pdf - Acesso em: 8 abr. 2022.

UNIOESTE - Prova da Segunda Etapa (Segundo dia). [S. l.], 2018. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/images/files/content/Vestibular_2018/Provas_-_Segunda_Etapa_-_Tarde.pdf - Acesso em: 14 abr. 2022.